

総合研究大学院大学先端学術院
加速器科学コース・素粒子原子核コース
5年一貫制博士課程入学試験問題
専門科目

令和8年8月19日（水） 9時30分～12時30分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること．

☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること．

☆ 6問の中から，4問を選んで解答せよ．

ただし、素粒子原子核コース理論部門を志望する（志望順位を問わ
ず）受験者は第1問及び第2問を必ず選択しなければならない．

☆ 試験問題（4問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること．

☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第〇〇問□□枚
目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用紙の
順番を記入すること．解答できない場合も，受験番号，氏名，問題
番号を記入し，提出すること．

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に知
らせること．

第1問

静電磁場内での荷電粒子の量子力学的運動を考える．粒子の電荷を e ，質量を m とし， B ， E を正の定数とすると，ベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0 \right) \quad (1)$$

によって z 軸正方向の一樣な静磁場が生じ，また，スカラーポテンシャル

$$\phi = \frac{mE}{2e} (x^2 + y^2) \quad (2)$$

によって xy 平面に平行な静電場が生じる．特に指示しない場合はシュレーディンガー描像で考えるとする．以下の問いに答えよ．

【問1】

座標 (x, y, z) と運動量 $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ を用いて質点のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi \quad (3)$$

を

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \frac{\omega_c}{2} (xp_y - yp_x) + \frac{1}{2m} p_z^2 \quad (4)$$

の形に書きかえ，式中の ω と ω_c の表式を求めよ．

以下では， xy 方向の運動とは独立な z 方向の運動，すなわち，式 (4) の最後の項を無視する．

【問2】

次の変数変換

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (p_x + m\omega y), & Q_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (p_y - m\omega x), \\ P_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (p_x - m\omega y), & Q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (p_y + m\omega x) \end{aligned} \quad (5)$$

により，質点のハミルトニアンが2つの独立な調和振動子の形

$$H = \sum_{k=1}^2 \frac{\hbar\omega_k}{2} (P_k^2 + Q_k^2) \quad (6)$$

に書けることを示せ．ここで， $\hbar$ は換算プランク定数であり，2つの振動数は

$$\omega_1 = \omega + \frac{\omega_c}{2}, \quad \omega_2 = \omega - \frac{\omega_c}{2} \quad (7)$$

で与えられる．

【問3】

座標 (x, y, z) と運動量 (p_x, p_y, p_z) の交換関係を用いて次の交換関係を導け．

$$\begin{aligned} [Q_k, P_l] &= i\delta_{kl} \quad (k, l = 1, 2), \\ [Q_k, Q_l] &= [P_k, P_l] = 0 \quad (k, l = 1, 2), \\ [H, Q_k] &= -i\hbar\omega_k P_k \quad (k = 1, 2), \\ [H, P_k] &= i\hbar\omega_k Q_k \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \quad (8)$$

【問 4】

演算子

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (P_k - iQ_k), \quad a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (P_k + iQ_k) \quad (k = 1, 2) \quad (9)$$

の交換関係 $[a_k, a_l]$, $[a_k^\dagger, a_l^\dagger]$, $[a_k, a_l^\dagger]$ ($k, l = 1, 2$) を求めよ。また、粒子のハミルトニアンを表す式 (6) を $a_k, a_k^\dagger$ ($k = 1, 2$) を用いて書きくたせ。

【問 5】

粒子のエネルギー準位を求めよ。

【問 6】

ハイゼンベルグ描像の演算子 $O(t)$ の時間発展はハイゼンベルグ方程式

$$\frac{dO(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, O(t)] \quad (10)$$

で記述される。この微分方程式をハイゼンベルグ描像の演算子 $Q_k(t)$, $P_k(t)$ ($k = 1, 2$) について解き、その時間発展が

$$Q_k(t) = \cos(\omega_k t) Q_k + \sin(\omega_k t) P_k, \quad (11)$$

$$P_k(t) = -\sin(\omega_k t) Q_k + \cos(\omega_k t) P_k \quad (12)$$

と与えられることを導け。ただし、初期条件を $Q_k(0) = Q_k$, $P_k(0) = P_k$ とする。

【問 7】

ハイゼンベルグ描像での空間座標 $x(t)$, $y(t)$ の時間発展が

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t & \sin \omega_2 t \\ \sin \omega_2 t & -\cos \omega_2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_2 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

で与えられることを示せ。また、古典極限での運動の様子を知るために、 Q_k, P_k ($k = 1, 2$) を実定数とし、 $x(t), y(t)$ を t の実数関数と考える。このとき式 (13) は xy 平面上のどのような運動を記述するかを述べよ。

第2問

本問では極低温における自由フェルミ気体の統計的性質に着目し、その応用として白色矮星と呼ばれる電子の縮退圧によって支えられた高密度天体の基本的性質を考察する。以下では簡単のため電子は非相対論的自由粒子として扱い、そのエネルギーは

$$\varepsilon(|p|) = \frac{|p|^2}{2m_e} \quad (1)$$

で与えられるとする。ただし m_e は電子の質量で p はその三次元運動量である。

【問1】

温度が T および化学ポテンシャルが μ のとき、エネルギー ε の電子の占有確率は以下

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp[(\varepsilon - \mu)/(k_B T)] + 1} \quad (2)$$

のフェルミ・ディラック分布で与えられる。ただし k_B はボルツマン定数である。

- (a) 有限温度における分布関数 $f(\varepsilon)$ の概形を図示するとともにその概形を論じよ。
- (b) 低温極限では $f(\varepsilon)$ は $\varepsilon \simeq \mu$ 付近で急峻に変化し、特に $T = 0$ では

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & (\varepsilon < \mu), \\ 0 & (\varepsilon > \mu), \end{cases} \quad (3)$$

となることを説明せよ。占有されるエネルギーの上限値をフェルミエネルギーとよび、以下では ε_F と書く。

【問2】

単位体積あたりの電子の数、数密度 $n_e (= N_e/V)$ は以下

$$n_e = 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} f(\varepsilon(|p|)) \quad (4)$$

のように与えられる。 N_e は体積 V 中の電子の数で p は三次元運動量である。ただし $\hbar$ は換算プランク定数である。

- (a) 上式の数因子 2 が必要である理由を説明せよ。
- (b) $T = 0$ において、電子数密度 n_e とフェルミ運動量 $p_F (= \sqrt{2m_e\varepsilon_F})$ の関係

$$n_e = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \quad (5)$$

を導け。

- (c) $T = 0$ の非相対論的自由電子気体のエネルギー密度 u を求め、 u を n_e を用いて書き下せ。

【問3】

次に、白色矮星を質量 M 、半径 R をもつ球状天体とみなし、その基本的性質を考察する。ただし簡単のため、球内の質量密度は一様であると近似する。また、問2で求めた電子のエネルギー密度 u を用いて白色矮星中の電子の縮退エネルギーを $U_{\text{deg}} = uV$ と評価する。白色矮星を支える圧力 P は主に電子の縮退圧に由来するため、熱力学的関係式を用いて P は

$$P = - \left(\frac{\partial U_{\text{deg}}}{\partial V} \right)_{N_e} \quad (6)$$

と近似的に与えられる。ただし、下付き添字 N_e は電子数 N_e を固定して微分することを意味する。圧力 P と電子数密度 n_e が

$$P \propto n_e^{5/3} \quad (7)$$

の関係を満たすことを示せ。

【問4】

白色矮星の全エネルギーを電子の縮退エネルギー U_{deg} および重力エネルギー U_{grav} の和として

$$U(R) = U_{\text{deg}}(R) + U_{\text{grav}}(R) \quad (8)$$

と表す。ただし R は白色矮星の半径である。また以下では、電子の数と白色矮星の質量が概ね比例している ($M \propto N_e$) ことを用いてよい。

- (a) 一様密度をもつ球状天体の重力エネルギー $U_{\text{grav}}(R)$ を求める。中心から半径 r 以内に含まれる質量を $M(r)$ とし、半径 r 、厚さ dr の薄い殻の質量を dm とする。このとき、半径 r の薄い質量殻 dm が、中心から半径 r 以内の質量 $M(r)$ に対してもつ重力エネルギーは重力定数 G を用いて

$$dU_{\text{grav}} = - \frac{GM(r) dm}{r} \quad (9)$$

と与えられる。これを用いて一様密度をもつ半径 R 、質量 M の球状天体の $U_{\text{grav}}(R)$ が

$$U_{\text{grav}} = - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (10)$$

と与えられることを導け。

- (b) $U(R)$ を最小にする半径 R を求めることで、定数パラメータ A, q で与えられる白色矮星の質量半径関係

$$R = AM^q \quad (11)$$

が得られる。定数パラメータ q を定めよ。また、白色矮星の質量 M が増大するにつれ、その半径 R および内部の電子の数密度 n_e はそれぞれ増大するか、減少するか述べよ。

- (c) 比較のため、白色矮星ではなく高温の理想気体が熱圧によって重力に抗している星（例えば太陽など）を考える。粒子数を N 、温度を T とする。熱平衡にある理想気体の状態方程式

$$P_{\text{th}} V = N k_B T \quad (12)$$

を考慮し、粒子数 N を固定したときに熱圧 P_{th} を増大させる2つの方法を述べよ。

- (d) (c) の熱圧によって支えられた星の状況と比較しつつ、(b) で得られた白色矮星の質量と半径の関係についてこのような挙動になる理由を考察せよ。

第3問

本問では、中心力ポテンシャルのもとでの円軌道と、その近傍での運動について考える。天体の軌道や等方的なばねによる振動など、中心力ポテンシャルに基づく運動では、ポテンシャルの距離依存性によって軌道の性質が変化する。そこで本問では、中心力ポテンシャル U を

$$U = Kr^n \quad (1)$$

と表し、運動が指数 n によってどのように変化するかを調べる。ここで、 K と n は $nK > 0$ を満たす実定数とし、中心力が原点向きに働く場合を考える。以下では、ある慣性系において、質量 m の質点が式 (1) のポテンシャルの中心を原点とする二次元極座標 (r, θ) 平面上を非相対論的な速度で運動する場合を考える。 r は原点からの距離を表す動径座標、 θ は角度座標である。変数上のドットは時間 t による微分を表すものとする。以下の問に答えよ。

【問1】

- (a) 運動エネルギーを T とする。この系のラグランジアン $L = T - U$ を書き下せ。
(b) r 方向の運動方程式が式 (2) のように表されることを示せ。

$$m\ddot{r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - nKr^{n-1} \quad (2)$$

ここで、 p_θ は次式の角運動量とする。

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad (3)$$

【問2】

質点が半径 r_0 、角速度 $\omega_0 (> 0)$ で等速円運動をする場合を考える。 ω_0 を K, n, m, r_0 を用いて表せ。

【問3】

【問2】の円軌道の安定性について考える。遠心力と引力はそれぞれ異なる r 依存性をもつため、ずれに対して元の円軌道へ戻すような復元力が働く条件が存在する。これを「円軌道が安定である」と表現することにする。安定条件を満たす質点の運動は図1のような円軌道近傍の微小振動軌道となる。ここでは簡単のため、【問2】の円軌道に対応する角運動量 $p_\theta = mr_0^2\omega_0$ を保ったまま、 r 方向の位置だけがわずかにずれる仮想的な状況を考える。以下では r 座標を、基準となる円軌道の半径 r_0 と時間に依存するずれ x を用いて次式のように表すこととする。

$$r = r_0 + x \quad (|x| \ll r_0) \quad (4)$$

- (a) 復元力を x の一次までで近似すると、次式のような線形の運動方程式が得られる。

$$\ddot{x} = -\omega_r^2 x \quad (5)$$

角振動数 ω_r を、 ω_0 と n を用いて表せ。

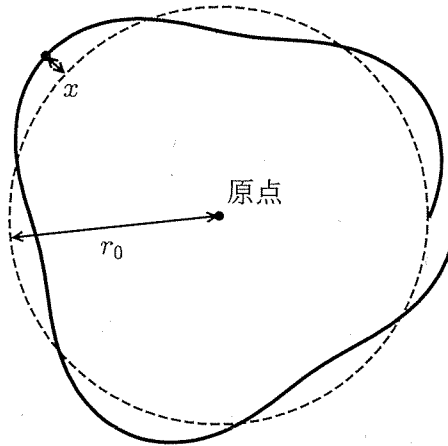


図 1: 安定条件が満たされる場合の、半径 r_0 の円軌道（破線）近傍の微小振動軌道（実線、1 周分）の例。ただし軌道振幅は誇張して描いている。

- (b) 【問 2】の円軌道が r 方向の微小なずれに対して安定であるために n が満たすべき条件を求めよ。

以下の【問 4】および【問 5】では、【問 3】(b)で求めた安定条件が成り立つものとする。

【問 4】

次に、質点の力学的エネルギーと軌道半径の関係について考える。質点がエネルギーを失うと軌道半径も変化する。ここでは簡単のため、エネルギーが変化して半径がわずかに異なる円軌道を描くような状況を考える。

- (a) 半径 r で等速円運動をする質点の力学的エネルギー E を K, n, r を用いて表せ。
- (b) $E = E_0, r = r_0$ で円運動していた質点の力学的エネルギーおよび軌道半径がそれぞれ $E = E_0 + \Delta E, r = r_0 + \Delta r$ ($|\Delta E| \ll |E_0|, |\Delta r| \ll r_0$) に変化したとする。 E を Δr の二次以上の項を無視して計算することにより、 Δr を近似的に求めよ。 解答は $n, m, r_0, \omega_0, \Delta E$ を用いて表せ。
- (c) (b)の結果を用いて、力学的エネルギーが減少した場合、円軌道の半径は大きくなるか小さくなるかを理由とともに答えよ。

【問 5】

【問 3】では x が十分小さいとして、運動方程式を x の一次までで近似した。しかし振幅が大きくなるとこの近似では不十分になり、高次の項による補正（非線形性）を考える必要がある。本問では非線形性の影響を見るための単純なモデルとして、 x の符号に対して対称な三次の復元力だけを取り出した以下の運動方程式を仮定し、角振動数の変化を調べる。

$$\ddot{x} = -\omega_r^2 x - \alpha x^3 \quad (\alpha > 0) \quad (6)$$

ただし、非線形項は線形項に比べ十分小さい場合を考える。すなわち、基本振動成分の振幅を A とすると、 $\frac{\alpha A^2}{\omega_r^2} \ll 1$ が成り立つとする。また、 $|A| \ll r_0$ とする。

- (a) まず角振動数の表式を求める。非線形性が現れる振動では、一般に解は基本振動とその高調波（角振動数が基本振動の整数倍となる成分）の和で近似的に表される。これを運動方程式に代入し、同じ振動数をもつ項ごとに係数を比較する連立方程式を解けば、基本振動の角振動数および各高調波成分の振幅を決定することができる。本問では非線形項の影響が小さく基本振動成分が支配的であるため、近似解を次式のように置く。

$$x \simeq A \cos \omega t \quad (7)$$

ここで、 $\omega(>0)$ は非線形項の影響で ω_r からわずかにずれた角振動数である。この近似解を運動方程式に代入し基本振動成分の係数を比較することにより、 ω を求めよ。解答は ω_r, α, A を用いて表せ。必要であれば次の三角関数の公式を用いてよい。

$$\cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta \quad (8)$$

なお、非線形項からは高調波成分も現れるが、これを打ち消すには解に高調波項を導入する近似が必要になるため、本問の近似では表せない残差として無視してよい。

- (b) 角振動数のずれ $\Delta\omega = \omega - \omega_r$ を $\frac{\alpha A^2}{\omega_r^2}$ の二次以上の項を無視して近似的に求め、 $\Delta\omega$ が振幅 A にどのように依存するかを答えよ。
- (c) 角振動数の n 依存性を確認するため、 $\Delta\omega$ を K, n, m, r_0, α, A を用いた式で表せ。

第4問

【問1】

図1のような内側導体の外半径 a ，外側導体の内半径 b ，長さ ℓ の同軸円筒形コンデンサーを考える。ただし， $\ell \gg b$ とし，端効果は無視できるものとする。内側導体に電荷 $+Q$ ，外側導体に電荷 $-Q$ が与えられている。導体間は真空で保たれており，その誘電率を ε_0 とする。

- (a) 半径 r ($a < r < b$) における電場 $E(r)$ の大きさを求めよ。
- (b) 内側導体と外側導体の電位差 V を求めよ。
- (c) この円筒形コンデンサーの静電容量 C を求めよ。
- (d) このコンデンサーの静電エネルギー U を，静電容量 C と電荷 Q を用いて表せ。

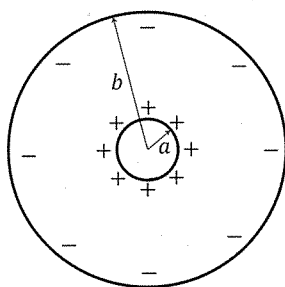


図1: 長さ ℓ の同軸円筒形コンデンサーの断面

次に，図1の同軸円筒形コンデンサーの内側導体と外側導体の間に比誘電率 ε_r の誘電体を長さ x だけ挿入する(図2)。ただし，誘電体は同軸円筒形コンデンサーの端から，軸方向に一樣に挿入されているものとし，挿入する過程で導体に与えられた電荷 $\pm Q$ は一定に保たれるものとする。

- (e) 誘電体が長さ x だけ挿入されたときの静電容量 $C(x)$ を求めよ。
- (f) 誘電体に働く力 F を求めよ。ただし，誘電体を引き込む向きを正とする。

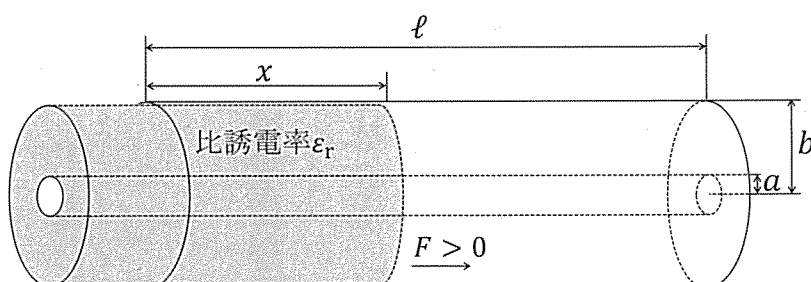


図2: 比誘電率 ε_r の誘電体が長さ x だけ入った同軸円筒形コンデンサー

【問2】

真空中に図3のような十分に長い直線導線がある．この直線導線を含む平面内に導線からの距離が $r = a$ から $r = b$ ($b > a$) の範囲にわたる高さ h の長方形の1回巻きコイルを置く．真空の透磁率を μ_0 とする．

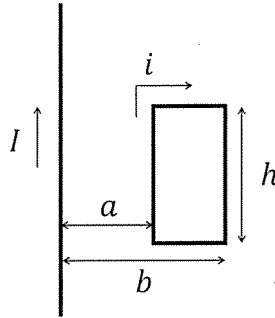


図3: 直線導線と長方形コイル

最初に、直線導線に時間変動のない電流 I が流れているときを考える．

- (a) 直線導線から距離 r の点における磁束密度 $B(r)$ の大きさを求めよ．
- (b) コイルを貫く磁束 Φ を求めよ．

次に、直線導線に時間 t で変動する電流 $I(t) = I_0 \cos \omega t$ が流れているときを考える．ただし、 I_0 および ω は正の定数とする．

- (c) コイルを貫く磁束 $\Phi(t)$ を求めよ．
- (d) コイルに誘起される起電力 $\mathcal{E}(t)$ を求めよ．ただし、電流が時計回りに流れる向きを正とし、それに対応する向きに起電力の符号を定めるものとする．なお誘導電流が作る磁場は無視してよい．
- (e) コイルの自己インダクタンスは無視できるものとし、コイルの電気抵抗を R とする．コイルに流れる電流 $i(t)$ を求めよ．
- (f) コイルで消費されるジュール熱の瞬間電力と平均電力を求めよ．

第5問

中性子 (n) は、弱い相互作用によって陽子 (p)、電子 (e^-)、および反電子ニュートリノ ($\bar{\nu}_e$) へと β 崩壊する。これについて、以下の問いに答えよ。

【問1】

以下では、中性子は実験室系において静止しているものとし、中性子、陽子、電子の静止質量をそれぞれ m_n, m_p, m_e とし、反電子ニュートリノの質量は無視できるものとする。また、光速を c とする。

- (a) 崩壊の前後におけるエネルギー保存則を、陽子の運動エネルギー K_p 、電子の全エネルギー E_e 、反電子ニュートリノのエネルギー E_ν 、および中性子と陽子の静止質量の差 $\Delta M = m_n - m_p$ を用いて記述せよ。
- (b) 放出される陽子、電子、反電子ニュートリノの運動量をそれぞれ $\vec{p}_p, \vec{p}_e, \vec{p}_\nu$ とし、その大きさを p_p, p_e, p_ν とする。運動量保存則を用い p_p が最大となるのは、電子と反電子ニュートリノがどのような位置関係で放出されたときか答えよ。またそのときの p_p を p_e, p_ν を用いて表せ。
- (c) 関係式 $p_e < E_e/c$ および $p_\nu = E_\nu/c$ が成り立つことを利用し、陽子の最大運動量 $p_{p,max}$ が、 ΔM を用いて以下の不等式で抑えられることを示せ。

$$p_{p,max} < \Delta M c \quad (1)$$

- (d) 陽子は非相対論的 ($K_p = p_p^2/2m_p$) として扱えるものとする。 $\Delta M c^2 \approx 1.3 \text{ MeV}$, $m_p c^2 \approx 938 \text{ MeV}$ としたとき、 K_p が取り得る最大値 (上限) を有効数字 1 桁で求めよ。
- (e) 前問の結果に基づき、電子のエネルギースペクトルを議論する際「陽子の運動エネルギー K_p を無視して $E_e + E_\nu \approx (m_n - m_p)c^2$ と置く近似の妥当性を論じよ。」

【問2】

超冷中性子 (UCN) は、非常に低い運動エネルギーを持つため、物質表面で全反射され、容器内に長時間閉じ込めることができる。中性子の β 崩壊寿命はこの UCN を用いて測定される。UCN の典型的なエネルギーは $E = 100 \text{ neV}$ である。

計算には以下の値を用いよ。

- プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- 中性子質量 $m_n = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- ボルツマン定数 $k_B = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
- $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$

- (a) $E = 100 \text{ neV}$ の UCN について、以下を有効数字 1 桁で求めよ。
 - (i) この UCN のド・ブロイ波長 λ を求めよ。
 - (ii) この UCN のエネルギーを温度 T に換算せよ ($E = k_B T$ とする)。

(b) ある容器に時刻 $t = 0$ で N_0 個の UCN を注入し、一定時間保持した後の残存数を計測して寿命 τ_n を決定する実験を考える。寿命とはある時刻にあった粒子の個数が $1/e$ になる時間の事をいう (e は自然対数の底)。UCN は β 崩壊でのみ減少するとする。

(i) 時刻 t における容器内の UCN 数 $N(t)$ を表す式を導け。

(ii) 保持時間 t_1 における残存数 N_1 と、保持時間 t_2 ($t_1 < t_2$) における残存数 N_2 をそれぞれ個別に測定したとする。これらの測定値 t_1, t_2, N_1, N_2 を用いて τ_n を表す式を導け。

(c) ある容器に時刻 $t = 0$ で $N_0 = 10,000$ 個の超冷中性子 (UCN) を注入し、一定時間保持した後の残存数を計測した。計測されるカウント数 N はポアソン統計に従い、その統計誤差 (標準偏差) は $\sigma = \sqrt{N}$ で見積もられるものとする。以下の表は、保持時間 t を変えて測定した際の数値例である。

試行	保持時間 t (s)	残存数 $N(t)$ (個)	統計誤差 $\sqrt{N}$	相対誤差 (%)
1	200	7965	(ア)	(エ)
2	900	3580	(イ)	(オ)
3	4000	108	(ウ)	(カ)

(i) 表中の空欄 (ア)~(カ) を埋めよ。(ア)~(ウ) は整数値で答え、(エ)~(カ) は相対誤差をパーセント (%) 表示とし、小数点以下 1 桁まで求めよ。

(ii) 保持時間 t が長くなるにつれて、相対誤差 (%) はどのように変化するか述べよ。

(iii) 試行 1 と試行 2 のデータのみを用いて、中性子寿命 τ_n を算出せよ。結果は整数値で答えよ。必要であれば $\ln(3580/7965) \approx -0.799$ を用いてよい。

(d) 寿命 τ_n の測定誤差をさらに半分にしたい。そのためには、同じ条件での測定を何倍繰り返してデータを蓄積する必要があるか。系統誤差は考慮しない。

第6問

本問では電子の運動方程式を解き，電界中の荷電粒子の挙動に関して，その基礎を問う．

【問1】～【問4】に答えよ．なお，比較的低いエネルギー領域での古典的運動を対象とし，相対論的效果を示すローレンツ因子 γ は一定値1とする．

【問1】

時間的に一定，且つ，空間的に一様な電界 E を想定し，電界の方向を x 軸として，電子（質量： m_0 ，電荷： $-e$ ）の運動の基礎を確認する．図1のように，直流電源の出力スイッチ SW を閉じることで，電子放出電極から距離 d 離れた対向電極に電圧 V を印加し，電極間に電界を形成し，電子を加速する．

- (a) 初期位置，初速ともに0と仮定して式(1)で与えられる電子の運動方程式を解き，時刻 t における

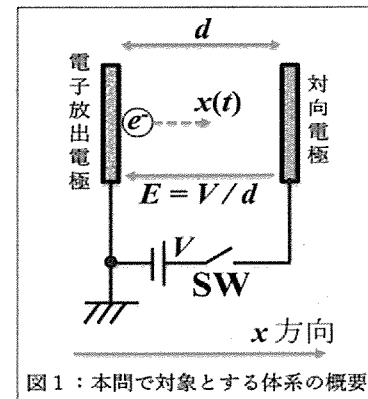


図1：本問で対象とする体系の概要

電子の位置 $x(t)$ ，速度 $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ，運動エネルギー $K(t)$ を導出せよ．

$$m_0 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{eV}{d} \quad (1)$$

- (b) 電子が対向電極に到達するまでの時間 T ，及び，到達時の速度 $v(T)$ ，運動エネルギー $K(T)$ を導出せよ．
- (c) 対向電極に電子が流れ込むと，電気回路における電流のように見える．面積 S の対向電極に，空間的に一様な数密度 n_e の電子が流れ込む場合を想定すると，その電流は式(2)で与えられる．前問(b)で導出した変数を代入し，印加電圧 V と電流 I の関係式を導出せよ．

$$I = -en_e S v(T) \quad (2)$$

【問2】

前問【問1】の図1の電極間に中性粒子が空間的に一様に存在し，電子と中性粒子の衝突がある場合を考える．衝突のような非線形現象を記述するのは難しいが，下記の要領でその概要を理解できる．本問では大気組成に近い中性粒子群を想定し，衝突による電離現象および放電現象のめやすを算出する．なお，下記の小問(a)と(b)に関しては有効数字2桁で回答すること．また，小問(c)に関しては空欄にふさわしい語句をその下に記載する選択肢から選び，記号を回答すること．

- (a) 気体の状態方程式 $p = n_n RT_R$ から、温度 $T_R = 2.9 \times 10^2 \text{ K}$ で圧力 $p = 1.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ の中性粒子の数密度 n_n を計算せよ。気体定数を $R = 8.3 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ 、アボガドロ数を $6.0 \times 10^{23} \text{ 個/mol}$ とする。
- (b) 図 1 における電子が前問 (a) の状態の中性粒子と衝突した後、次の衝突までに電子が走行する平均的な距離 r_a は、

$$r_a = \frac{1}{\sigma n_n} \quad (3)$$

で算出できるとし、電極間距離 1 cm に 30 kV の電圧を印加した場合、電子が距離 r_a で獲得する運動エネルギー(単位: eV) を求めよ。中性粒子 1 個が電子と反応可能なエリア(断面積)を $\sigma = 1.0 \times 10^{-20} \text{ m}^2$ 、 $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ とする。

- (c) 前問 (b) において、中性粒子として窒素(電離エネルギー: 15 eV)を想定する。上記の距離 r_a ごとに確実に衝突が起こると仮定した場合、衝突時の電子の運動エネルギーは電離エネルギー 。なお、励起や解離などの電離以外の現象は無視するものとする。また、電離が起こる場合、窒素分子から 1 個の窒素原子から 1 個の電子が電離するものとする。

[回答選択肢]

- (ア) を超えるため、電離が生じ、電子の増殖が起こる
 (イ) と一致するため、現象は安定化する
 (ウ) を超えないため、1 回の衝突では電離は起こらない

【問 3】

以下の文章中の空欄 (a) ~ (e) にふさわしい語句を下の選択肢から選び、記号を回答すること。

放電現象は爆発的多粒子現象であり、構造物や周辺環境のわずかな差によって放電現象が起きる条件が異なるため、理論的に正確に予測することは難しい。厳密な表現は難しいが、重要な要素である中性粒子の数密度に対しては、統計学的な導出に基づくパッシェンの法則を用いて、式 (4) のような形で放電開始電圧 $V_d(u)$ のめやすが得られる(C : 定数; u : 中性粒子数密度に比例する関数)。

$$V_d(u) = C \frac{u}{1 + \ln u} \quad (\text{ただし, } u > \frac{1}{e}; \text{ 本問での "e" は自然対数の底.}) \quad (4)$$

V_d は $u = \text{(a)}$ で極小値をもつ。この極小点は、最も 条件であることを意味する。放電を利用した真空管スイッチ等は内部に中性粒子を充填し、その中性粒子の数密度がこの極小点になるように設計される。他方、放電や電気絶縁破壊を起こしたくない場合は、中性粒子を注入し数密度(気体圧力)を上げ極小点を回避する。数密度を上げることにより、衝突頻度が 、無衝突で走行できる距離が なるため、電子は電離に必要なエネルギーを獲得できず、放電現象は起りにくくなり、良好

な電気絶縁環境を構築できる。中性粒子数密度が高くなるため統計学的取扱いが非常に有効であり、式(4)の信頼性が非常に高い。一方、式(4)において中性粒子数密度を極小点より下げる方も放電開始電圧が高くなり、電気絶縁特性の改善が期待できる。これは電子と中性粒子の衝突^(e)ことを意味する。衝突しなければ電離は起こらないため放電現象を回避できる。ただし、電子が獲得できる運動エネルギーが過剰となり、複合的な様々な作用を引起す可能性が高まり、それらを把握しておく必要がある。

[回答選択肢]

- | | | | |
|-----------------------------|-------------|---------------------|------------|
| (ア) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ | (イ) 1 | (ウ) $\frac{\pi}{3}$ | (エ) e |
| (オ) 安定な | (カ) 放電し難い | (キ) 放電し易い | (ク) 変わらずなく |
| (ケ) 多くなり | (コ) 少なくなり | (サ) 短く | (シ) 長く |
| (ス) 確率が安定する | (セ) 確率が向上する | (ソ) 確率が低下する | |

【問4】

下記の文章中の2箇所の空欄 (a), (b) にふさわしい語句を下記選択肢から選び、記号を回答すること。

1個1個の電子を個別に加速するのは非常に難しく、大量の電子を同時に加速することが多い。その場合、大量の負の電荷群となるため、電子自身が展開する電界が非常に大きくなり、電源により展開される電界を相殺していき、最終的に相互の電界が中和して安定化する。ここでは、電子群が展開する電界が電源から供給される電界と同等になる条件を想定し、電源電圧と電子電流の依存性の概要を確認する。電子群が展開する電界は非常に複雑であるが、誘電率を一定値 ϵ_0 としたガウスの法則

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}_e) = -en_e \quad (5)$$

から、電子群が展開する電界強度 $|\mathbf{E}_e|$ は電子数密度 n_e と^(a)あり、電子数密度 n_e は電源電圧 V に比例することになる。電子電流 I は【問1】(c)の式(2)で定義できるため、電子電流と電圧 V の関係は

$$I \propto \text{(b)} \quad (6)$$

となる。この電流と電圧の関係に関して、比例係数も理論的に導出した厳密な式はチャイルドラングミュア則として知られる。

[回答選択肢]

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|-------------------|
| (ア) は無関係で | (イ) 比例関係に | (ウ) 反比例の関係に |
| (エ) 1 | (オ) V | (カ) $\frac{1}{V}$ |
| (キ) $\sqrt{V}$ | (ク) $\frac{1}{\sqrt{V}}$ | |
| (ケ) $V^{3/2}$ | (コ) $\frac{1}{V^{3/2}}$ | (サ) V^2 |
| (シ) $\frac{1}{V^2}$ | (ス) $V^{5/2}$ | |
| (セ) $\frac{1}{V^{5/2}}$ | | |