

総合研究大学院大学先端学術院
加速器科学コース・素粒子原子核コース
5年一貫制博士課程入学試験問題
数 学

令和8年8月19日（水） 13時30分～14時20分

注意

- ☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること．
- ☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること．
- ☆ 試験問題（3問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること．
- ☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第〇〇問□□枚目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること．
- 解答できない場合も，受験番号，氏名，問題番号を記入し，提出すること．
- ☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に知らせること．

第1問

【問1】

実数 t の実関数 $C(t)$ に関する常微分方程式

$$\frac{dC(t)}{dt} = -G(C(t) - C_{\text{in}}) \quad (1)$$

ここで実定数 G, C_{in} は $G > 0$, $C_{\text{in}} \geq 0$ を満たす. $C(t) > C_{\text{in}}$ かつ $C(t=0) = C_0$ が成立するとき, 解 $C(t)$ を求めよ.

【問2】

t を正の実数とし, $v(t)$ と $m(t)$ を実数に値をとる t の関数とする. また, u を正の実定数とする. このとき $v(t)$ と $m(t)$ の t に関する常微分方程式

$$m(t) \frac{dv(t)}{dt} + \frac{dm(t)}{dt} u = 0 \quad (2)$$

について, 以下の問いに答えよ.

(a)

$$v(t) = \int dt \frac{dv}{dt} \quad (3)$$

を求めよ.

ただし, $v(0) = 0, m(0) = m_0$ を満たし, m_0 は正の実定数とする.

(b) $m_0 - m(t)$ が小さいと仮定し, 一次のテイラー展開を使って v を近似的に計算せよ.

第2問

【問1】

z を複素数とすると、複素平面上の関数

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad (4)$$

の極をすべて求めよ。

【問2】

x を実数とすると、以下に示す実軸上の積分の値を求めよ。

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + 1} \quad (5)$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{x^4 + 1} \quad (6)$$

第3問

x を実数とするとき, 以下の問いに答えよ.

【問1】

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (7)$$

を示せ.

【問2】

$$\int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \quad (\sigma > 0) \quad (8)$$

が成り立つように定数 A を定めよ. ただし μ, σ は実数とする.

【問3】

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (9)$$

を示せ. ただし n は正の整数, a は正の実数とする.