

総合研究大学院大学先端学術院
加速器科学コース・素粒子原子核コース
5年一貫制博士課程入学試験問題
専門科目

令和7年8月20日（水）13時00分～16時00分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。

☆ 6問の中から、4問を選んで解答せよ。

ただし、素粒子原子核コース理論部門を志望する（志望順位を問わず）受験者は第1問及び第2問を必ず選択しなければならない。

☆ 試験問題（4問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること。解答できない場合も、受験番号、氏名、問題番号を記入し、提出すること。

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に知らせること。

第1問

【問1】

x 軸上の1次元量子力学を考える．時間に依存するシュレディンガー方程式は，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi(t, x) \quad (1)$$

となる．ここで $\Psi(t, x)$ は波動関数， t は時間， x は座標， m は質量， \hbar は換算プランク定数， $V(x)$ は実ポテンシャルである．これを用いて以下の問いに答えよ．

- (a) $\Psi^*(t, x)\Psi(t, x)$ を時間微分することで保存則を導き，その物理的意味を述べよ．
- (b) 以下では定常解を考える．つまり，エネルギー E の解を考え $\Psi(t, x) = e^{-iEt/\hbar}\psi(x)$ とする．図1のように領域1と領域2でポテンシャルの値が不連続的に異なる時，その境界 x_b で波動関数 $\psi(x)$ が満たすべき条件を式(1)から導け．ただしポテンシャルは有界 ($|V(x)| < \infty$) とする．

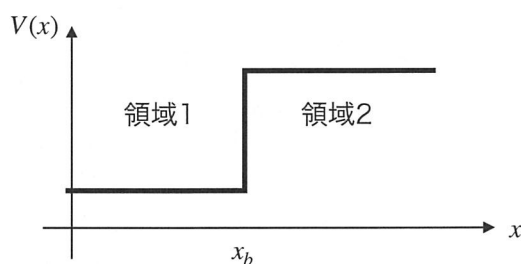


図1: $V(x)$ の異なる2つの領域．

- (c) 今度は図2のような正の実定数 $V_0 > 0$ の箱型ポテンシャルを考える．領域1から右向きに入射する時，それぞれの領域での波動関数を以下のように書いたとする． R, T, A, B は複素数で， k と p は正の実数である．この時， k と p を E と V_0 を用いて表せ．さらに，【問1】(a) で示した保存則から R, T, A, B に関係がつく．これを示せ．

領域1: $\psi(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx}$

箱: $\psi(x) = Ae^{-px} + Be^{px}$

領域2: $\psi(x) = Te^{ikx}$

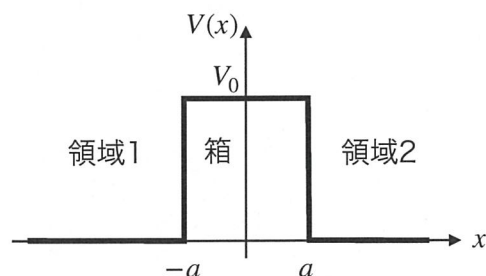


図2: 箱型ポテンシャル．

- (d) 【問1】(b) の条件を用いることで R, T, A, B を k, p, a を用いて書き下せ．また，【問1】(c) の R, T, A, B の関係式を満たすことを確かめよ．いずれも $pa \gg 1$ を用いよ．

【問2】

【問1】(c), (d) で考えた箱型ポテンシャルを以下の図3のように実定数 d だけ離して2つ置いた場合を考える。以下では、解答を書く際、【問1】で求めた R, T を k, p, a の関数として書き下さずそのまま用いよ。

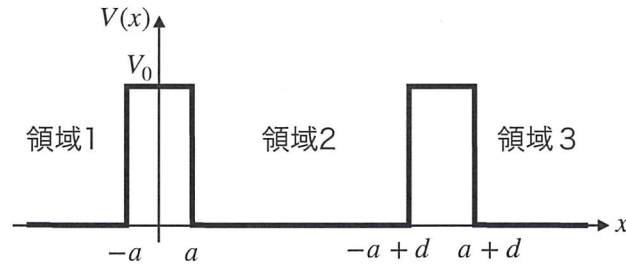


図3: 2つの箱型ポテンシャル.

- (a) 見通しよく解くために【問1】で考えた図2の箱型ポテンシャルが1つの場合を転送行列を用いて再考する。図2の領域1と領域2での波動関数をそれぞれ、領域1: $\psi = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$, 領域2: $\psi = A_2 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx}$ とする。この時、転送行列は以下のよう定義される複素 2×2 行列である。

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = T_{12} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

【問1】(a) で示した保存則から A_1, B_1, A_2, B_2 の間に関係がつく。また、ポテンシャルが実であることから、ある波動関数が解ならその複素共役も解である。これらの関係を用いて転送行列が以下の性質を満たすことを示せ。

$$T_{12} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \quad \text{ここで } \alpha, \beta \text{ は複素数である。} \quad (3)$$

- (b) 【問1】(c) は、 $A_1 = 1, B_1 = R, A_2 = T, B_2 = 0$ とした場合に他ならない。この事実と【問2】(a) で示した式(3)の転送行列の性質を用いて、 T_{12} を T と R を用いて書き下せ。
- (c) 図3のように同じ箱型ポテンシャルを2つ置く。領域3の波動関数を $\psi = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}$ とする。この時、新たな転送行列は以下の関係式で定まる。

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = T_{23} \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = T_{13} \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

T_{23} を R, T, k, d を用いて書き下せ。次に T_{13} を R, T, k, d を用いて書き下せ。

- (d) 図3の領域1から右向きに入射する場合を考える。表式を簡単にするため実媒介変数 θ を関係式 $T = i^{-1} |T| e^{-2ika + 2i\theta}$ となるように導入する。 $A_1 = 1, B_1 = R_{\text{tot}}, A_3 = T_{\text{tot}}, B_3 = 0$ とした時、 $|T_{\text{tot}}|^2$ を R, k, d, θ を用いて書き下し、 $|T_{\text{tot}}| = 1$ の条件を求めよ。 $d \gg a$ を用い、 $|T|$ は R を用いて表せ。
- (e) 箱型ポテンシャルを2つ並べると透過確率は1つの場合の自乗で減りそうだが、 $|T_{\text{tot}}|^2 = 1$ の時はそうっていない。 $|T_{\text{tot}}|^2 = 1$ となる最低エネルギー状態の $|\psi(x)|^2$ の概形を図示せよ。その概形をふまえて、なぜ $|T_{\text{tot}}|^2 = 1$ になるのか、【問1】(a) で示した保存則も絡めて物理的理由を定性的に説明せよ。 $d \gg a$ と $pa \gg 1$ を用いよ。

第2問

磁性体の熱的性質を統計力学を用いて議論する。模型として、1次元的に N 個のスピンを並べたイジング・ハミルトニアン

$$H = - \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i - J \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad (J > 0) \quad (1)$$

を考える。 h_i は i 番目のスピン σ_i に結合する磁場、 J は最近接相互作用の強さとする。スピン自由度 σ_i は -1 または $+1$ の値を取るものとする。温度を T 、逆温度を $\beta = 1/(k_B T)$ と書く (k_B はボルツマン定数)。分配関数 $Z(T)$ とヘルムホルツの自由エネルギー F の関係は

$$Z(T) = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} e^{-\beta H} = e^{-\beta F} \quad (2)$$

で与えられる。エントロピーは $S = -\partial F / \partial T$ で与えられる。物理量 O の期待値は

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z(T)} \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} O e^{-\beta H} \quad (3)$$

と書く。また、スピンの和を $\sigma_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \sigma_i$ と書くことにする。

【問1】

磁場がない場合、つまり $h_1 = h_2 = \cdots = h_N = 0$ を考える。基底状態（最低エネルギー状態）はどのような状態か説明し、そのエネルギー E_0 を計算せよ。状態を書くときには $|\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = -1, \cdots\rangle = |\uparrow\uparrow\downarrow \dots\rangle$ などと略記してよい。

【問2】

最も単純な例として、まず $N = 2$ の場合を考え、具体的計算を行なう。以下 $h_1 = h_2 = h > 0$ の一様磁場がかかっている場合を考える。

- 分配関数とスピン和の期待値 $\langle \sigma_{\text{tot}} \rangle$ を計算せよ。
- 高温極限を考える。 $\beta J \ll 1, \beta h \ll 1$ として、 βJ と βh の2次まで分配関数を展開し、エントロピーを計算せよ。
- 次に低温極限 $T \rightarrow 0$ を考える。このとき、 $h \rightarrow 0$ の極限を (i) 低温極限よりも先にとる場合と (ii) 低温極限よりも後にとる場合の二通りで、自由エネルギーとスピン和の期待値 $\langle \sigma_{\text{tot}} \rangle$ を計算し、結果が異なることを確認せよ。（このような極限操作をとることにより、解析関数の和である分配関数に非解析性が導入される場合がある。この非解析性は相転移現象の記述に使われる。）

【問3】

再び一般の N の場合に戻って、一番外側の σ_N だけに強磁場がかかっている場合、つまり $h_1 = h_2 = \cdots = h_{N-1} = 0, h_N = h \gg J$ の場合を考える。状態和のうち、ハミルトニアンの第一励起状態からの寄与に注目する。第一励起状態のエネルギーをもつスピン配位は多数存在する。

- (a) まず基底状態のエネルギー E_0 を計算せよ. 次に第一励起状態のスピンの配位について説明し, そのエネルギー E_1 を計算せよ. 同じエネルギーを持つ状態はいくつあるか. この状態数を縮退度 Ω_1 と呼ぶことにする.
- (b) 前問 (a) で求めた縮退度 Ω_1 を用いてボルツマン・エントロピーを $S_1 = k_B \ln \Omega_1$ と書く. 第一励起状態の自由エネルギー $F_1 = E_1 - TS_1$ が基底状態のエネルギー E_0 よりも低くなるための条件を T, J, N を用いて表せ.
- (c) 前問 (b) の結果を使って, $T > 0$ で $N \rightarrow \infty$ の場合にスピン和の期待値がどう振る舞うか定性的な説明を与えよ. 特に厳密に $T = 0$ を取った場合との違いについて議論せよ.

第3問

次の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -k \cos(x) \quad (2)$$

で与えられる粒子の運動を考える．ただし k は正の定数である．位相空間 (x, v) における粒子の軌道は図1のように与えられる．

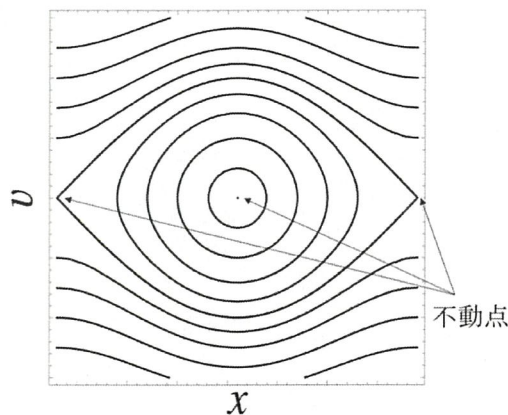


図1: 位相空間 (x, v) における粒子の軌道例．

【問1】

粒子が位相空間 (x, v) で描く軌道の式

$$k \sin(x) + \frac{v^2}{2} = C \quad (3)$$

を式(1)と(2)から導出せよ．ただし C は積分定数であり，位相空間 (x, v) における粒子の初期座標によって決まる値である．

【問2】

位相空間 (x, v) において，時間によらず運動が静止する座標を不動点と呼ぶ(図1参照)．ここでは不動点周りの粒子の軌道を考える．

- まず，位相空間における座標 $(x, v) = (\pi/2, 0)$ がこの運動の不動点であることを，式(1)と(2)を使って示せ．
- 同様に，座標 $(x, v) = (-\pi/2, 0)$ がこの運動の不動点であることを示せ．
- 座標 $(x, v) = (\pi/2, 0)$ の周りにおける粒子の軌道を考える．簡単のため

$$x = \frac{\pi}{2} + \Delta x \quad (4)$$

に座標変換し，粒子の初期座標を $(\Delta x, v) = (\Delta x_0, 0)$ に置くものとする．ただし $\Delta x_0 \neq 0$ である．今，粒子が $|\Delta x| \ll 1$ の範囲内に存在すると仮定して $\cos(\Delta x) = 1 - (\Delta x^2/2)$

の近似式を使ったときの位相空間 $(\Delta x, v)$ における粒子の軌道を、式 (3) を変形して与えよ。

(d) 同様にして、座標 $(x, v) = (-\pi/2, 0)$ の周りにおける粒子の軌道を与えよ。ただし今回は

$$x = -\frac{\pi}{2} + \Delta x \quad (5)$$

に座標変換すること。

(e) 粒子の初期座標を不動点から微小量ずらした時に、粒子が微小量の範囲を保ったまま不動点周りで運動を継続するのは【問2】の設問 (c) の場合と (d) の場合のどちらであるかを、【問2】の設問 (c) と (d) の結果を使って述べよ。

【問3】

次に、微分方程式 (1) と (2) で与えられる粒子の運動を、差分方程式

$$v_{n+1} = v_n - kt_0 \cos(x_n) \quad (6)$$

$$x_{n+1} = x_n + t_0 v_{n+1} \quad (7)$$

で近似する場合について考える。ただし n は整数である。また t_0 は粒子が (x_n, v_n) から (x_{n+1}, v_{n+1}) へ移動するまでの時間間隔で、 $t_0 > 0$ の定数である。式 (7) の右辺第二項において v_n ではなく v_{n+1} が使われていることに留意すること。

今、 (x_n, v_n) における粒子 A と、その近傍 $(x_n + \Delta x_n, v_n + \Delta v_n)$ における粒子 B を考える。任意の n について Δx_n と Δv_n は十分小さい値であり、 Δx_n と Δv_n に関する二次以上の成分は無視できるものとする。このとき、粒子 B の運動は行列

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial v_n} \\ \frac{\partial v_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial v_{n+1}}{\partial v_n} \end{pmatrix} \quad (8)$$

を用いて

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{n+1} \\ \Delta v_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \Delta x_n \\ \Delta v_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

で記述できる。

- 任意の n について、位相空間における座標 $(x_n, v_n) = (-\pi/2, 0)$ がこの運動の不動点となることを、式 (6) と (7) を使って示せ。
- 式 (6) と (7) から、式 (8) の行列式が 1 となることを示せ。
- 式 (8) の行列式が 1 なので、式 (8) の固有値が虚数解を持つときに粒子 B の運動は粒子 A の周りで安定となる。粒子 A を不動点 $(x_n, v_n) = (-\pi/2, 0)$ に置いたときに、式 (8) の固有値が虚数解となるための条件を求めよ。

第4問

電磁波の性質について考える。誘電率 ε 、透磁率 μ である媒質で満たされた空間中のマクスウェル方程式は、電場 E 、磁束密度 B としたとき、

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (1) \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (2) \quad \nabla \times B = \varepsilon\mu \frac{\partial E}{\partial t} + \mu i \quad (4)$$

である。ここで、 ρ は電荷密度、 i は電流密度、 t は時間である。

また、媒質の電気伝導率を σ としたとき、オームの法則は、

$$i = \sigma E \quad (5)$$

と表せる。以下の問題ではすべての媒質において、誘電率 ε 、透磁率 μ は周波数によらないとする。

(参考) ベクトル場 A に対して、次が成り立つ。

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A. \quad (6)$$

【問1】

- (a) マクスウェル方程式から、空間的、時間的ともに一様な誘電率 ε 、透磁率 μ 、電気伝導率 σ である媒質中では、 E 、 B の波動方程式は、

$$\left(\nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \right) E = 0, \quad (7)$$

$$\left(\nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \right) B = 0 \quad (8)$$

である。式(7)、式(8)を導け。ただし、分極はなく、電荷密度 $\rho = 0$ 、オームの法則にしたがう自由電流密度 i 以外の電流はないものとする。

- (b) 自由空間では、横波平面波は上記の波動方程式の解となる。 ω を角周波数として、座標 z と時間 t のみに依存した平面波 $u(z, t) = u_0 e^{i\omega t - \gamma z}$ を考えたとき、 γ^2 を σ 、 μ 、 ε 、 ω で表せ。

- (c) α 、 β を正の実数としたとき、 $\gamma = \alpha + i\beta$ と表すと、 $u(z, t) = u_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}$ となり、 $e^{-\alpha z}$ は減衰項、 β についての項は z に対する周期的な位相の進みを表す。真空中では $\rho = 0$ 、 $\sigma = 0$ 、 $i = 0$ 、 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 、 $\mu = \mu_0$ であるが、波の伝搬速度(位相速度) $\frac{\omega}{\beta}$ が光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ と一致することを示せ。

【問2】

図1のような真空(誘電率 ϵ_0 , 透磁率 μ_0) と有限な電気伝導率 σ を持つ導体が接している状況で, 境界条件を考える.

- (a) 高さ Δd 長さ $\Delta \ell$ の長方形の閉じた経路 C を考えたとき, $\Delta d \rightarrow 0$ で, 真空, 導体でのそれぞれの電場を E_1, E_2 としたとき, 電場の接線方向成分が連続

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (9)$$

であることを示せ. (\mathbf{n} は境界面での法線方向の単位ベクトルである.)
 なお, ストークスの定理

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (10)$$

が成り立つとする.

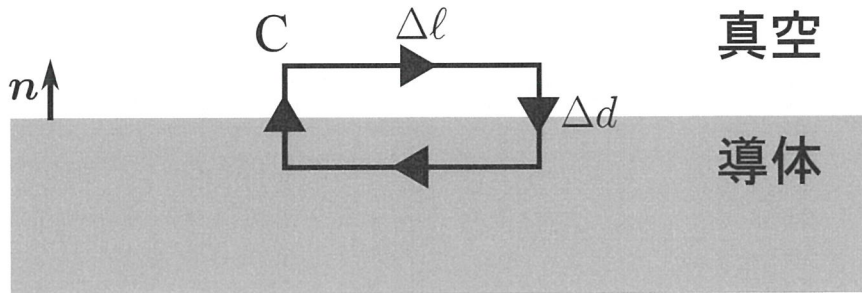


図1: 導体と真空との境界条件.

- (b) 導体が完全導体 ($\sigma \rightarrow \infty$) のとき, 真空中の境界表面の電場の接線方向成分はゼロになることを示せ. ただし, 完全導体中の ϵ は有限の値とする.
- (c) 導体に垂直に入射した電磁波 $u(z, t) = u_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}$ の振幅は, z が距離 $1/\alpha$ 進んだとき $1/e$ に減衰する. この距離 $1/\alpha$ を表皮深さ δ と呼ぶ. 導体では電気伝導率は著しく高く, $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$ が成り立つとき, $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu \omega}}$ となることを示せ.

なお, 実数 x, y について $\sqrt{x + iy}$ は,

$$\sqrt{x + iy} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{y}{|y|} \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \right) \quad (11)$$

の関係を使ってもよい.

- (d) 周波数が 1 kHz のときと 1 GHz のときの表皮深さ δ の比 $\frac{\delta_{1 \text{ kHz}}}{\delta_{1 \text{ GHz}}}$ を求めよ.
- (e) 周波数が有限で, 導体が完全導体のとき, 表皮深さの値はどうか.
- (f) 導体が完全導体で, 境界面に垂直に電磁波が入射するとき, 導体中の電場と磁場の接線方向成分はどう異なるか. また, 現実的には導体は有限の電気伝導率を持つが, その時の磁場の接線方向成分の境界条件はどうか.

第5問

【問1】

ニュートリノが質量を持つことは、ニュートリノ振動と呼ばれる現象を通して確認された。ニュートリノ振動とは、ニュートリノの種類が飛行中に自発的に変化する現象である。ニュートリノには「電子型 (ν_e)」「ミュー型 (ν_μ)」「タウ型 (ν_τ)」の3種類があるが、ここでは簡単のため「ミュー型」「タウ型」の2種類に限って考える。以下の問いに答えよ。

- (a) ミュー型のニュートリノ (ν_μ) が一定距離 ($L (> 0)$ [km]) を飛行後にタウ型のニュートリノ (ν_τ) に遷移する確率は

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{1.27 \Delta m^2 [\text{eV}^2]}{E [\text{GeV}]} L [\text{km}] \right) \quad (1)$$

と表される。ここで Δm^2 は2種類の質量の2乗差、 θ は混合角、 E はニュートリノのエネルギー、 L はニュートリノの飛行距離 (基線長) である。式 (1) からニュートリノ振動が起こる (つまり $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau} \neq 0$ となる) 条件を2つ述べよ。

- (b) 式 (1) から、振動の効果が最大となる (ミュー型がタウ型に最も遷移する) 距離 L を Δm^2 、 E を用いて表せ。ここで $0 \leq 1.27 \Delta m^2 L / E < \pi$ とする。
- (c) KEK では、加速器を用いて生成したミュー型ニュートリノを約 300 km 離れたスーパーカミオカンデで検出し、ニュートリノ振動を精密に検証している。この時主要な反応は、図1の準弾性散乱 ($\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$) である。ここで n は中性子、 p は陽子、 μ^- はミューオンである。この反応は二体反応であり、ミューオンの運動量 \vec{p}_μ とニュートリノビームに対するミューオンの角度 θ_μ からニュートリノのエネルギーを計算する事が出来る。

散乱前 (始状態)

散乱後 (終状態)

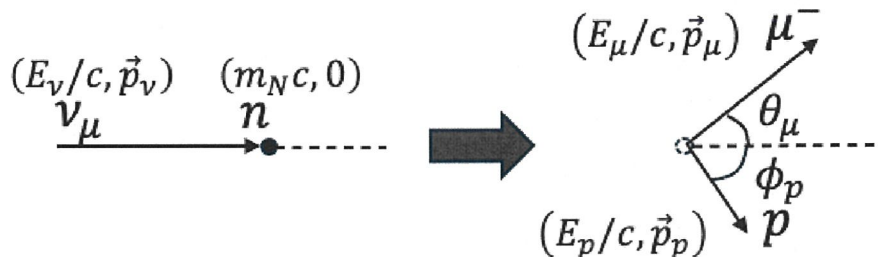


図1: ニュートリノ-核子の準弾性散乱反応。

- (i) 図1のニュートリノ反応において、反応前後のエネルギーおよび運動量保存則を表す式を記せ。ただし簡単のため、光速 c は1として良い。また、中性子は静止しているとし、ニュートリノの質量は0、中性子と陽子の質量は同じ (m_N) とする。運動量保存則の式はベクトル表記でも成分毎に表記してもかまわない。
- (ii) 上で記した式を解いて、(p_μ, θ_μ の関数として) ニュートリノのエネルギーを求めよ。
- (d) 図2は実際の実験で取得されたデータである。観測されたミュー型ニュートリノの数 (図の点線で表される) 予想よりも有意に少ないことがわかる。(b)と同様の考察を行い、最も振動の効果が顕著に見えているエネルギーの値から Δm^2 の値を有効数字1桁で求めよ。ここでニュートリノの飛行距離 (L) は 300 km とする。

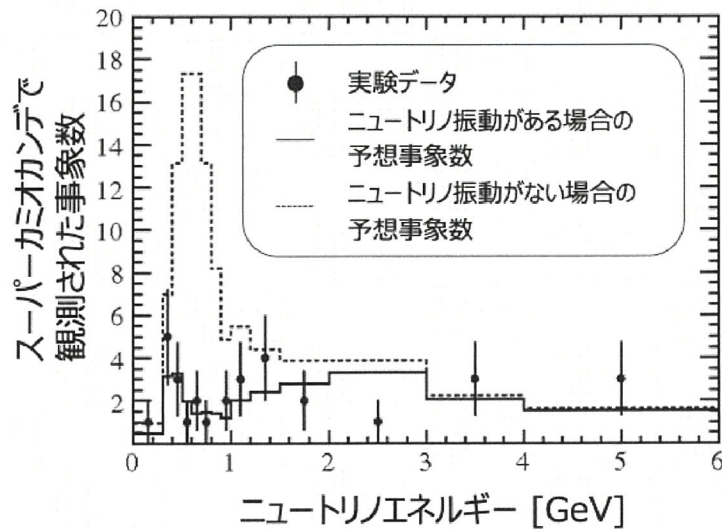


図 2: スーパーカミオカンデで観測されたニュートリノ事象のデータ. 黒点が実験データ, 実線はニュートリノ振動がある場合の予想事象数, 点線はニュートリノ振動がない場合の予想事象数を示している. T2K Collaboration, Physical Review D85, 031103 (2012) の図 3 を参照して作成.

【問 2】

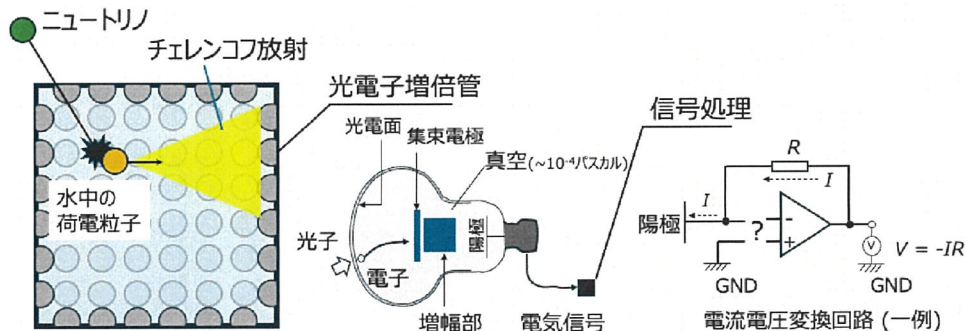


図 3: 大型の水タンクを用いたニュートリノ検出のイメージ.

(a) 以下の文および図 3 は 大型の水タンクを用いたニュートリノの検出方法の説明である.

(i) ~ (v) を埋めよ.

問 1 のスーパーカミオカンデでは, 大型の水タンクを用い, 水との反応で生じた荷電粒子をとらえることでニュートリノを検出する. 荷電粒子の速さが水中での光の速さよりも (i) 場合チェレンコフ放射という光が放出される. これを光電子増倍管でとらえて荷電粒子の種類や速度を測定し, ニュートリノの到来方向やエネルギーを推定する. 光電子増倍管は真空管の一種で, 1 光子を検出して十分大きな電気パルスを出力する. 真空が保たれたガラス管内に塗布された特殊な物質に光が当たると (ii) 効果により電子が放出される. この電子を, 電極に次々と加速・衝突させ, ねずみ算式に電子を増やし, 電気信号として取り出す. 各電極では, 1 つの電子から平均して 4 個程度の二次電子が生成されるため, 例えば 10 段の電極を持つ場合, 1 光子から 4^{10} , つまり 10^6 個程度の電子が得られる. 素電荷は 1.6×10^{-19} クーロンであるので, 10^6 個の電子は (iii) クーロンに相当する. これが平均的に 1 ns (10^{-9} s) の間信号として取り出されるとし,

測定時のインピーダンスを 50Ω とした時, 1 光子に対するパルス高は (iv) mV と求まる. 高感度の電流計が無い場合, 図の様なおペアンプを用いた電流電圧変換回路を用いて信号を増幅し, 安価な電圧計で光電子増倍管からの微小電流を測定する事が出来る. この回路を正常に動作させるためには, 光電子増倍管からの信号線をオペアンプの (v) 側の入力端子に接続する必要がある. 入力端子の正負を逆に接続すると, 正のフィードバックが働いて信号が発散的に増幅し, 回路として機能しなくなる.

- (b) 光電子増倍管の内部を真空にするのはなぜか, 理由を述べよ.
- (c) (a) で述べた方法で 5 週間ほどニュートリノを観測したところ, 1 週間毎の検出数は表 1 のとおりであった. 1 週間あたりの検出数を有効数字 2 桁で誤差と共に示せ. ただし, $\sqrt{486} = 22.0$ として計算してよい.

表 1: ニュートリノの 1 週間毎の検出数

	1 週目	2 週目	3 週目	4 週目	5 週目	合計
検出数 (x_i)	100	114	90	78	104	486
統計誤差 (Δx_i)	10	10.7	9.5	8.8	10.2	—

- (d) 各週の検出数のばらつきは, 統計誤差の範囲でのばらつきと言って良いか? 以下の仮説を立てて検討を行いなさい.

帰無仮説 (H_0): 検出数のばらつきは統計的誤差によるものである.

測定結果から χ^2 を計算すると 8.31 となる. 表 2 と図 4 を参照し, 有意水準 1% で χ^2 検定を行い帰無仮説が棄却出来るかを判定せよ. また 10% の場合についても判定せよ.

表 2: χ^2 分布表. z は 1 ~ 6 の各自由度における有意水準 1% と 10% での χ^2 分布の信頼区間の上限値を示している.

自由度	1	2	3	4	5	6
z (有意水準 1%)	6.63	9.21	11.3	13.3	15.1	16.8
z (有意水準 10%)	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.6

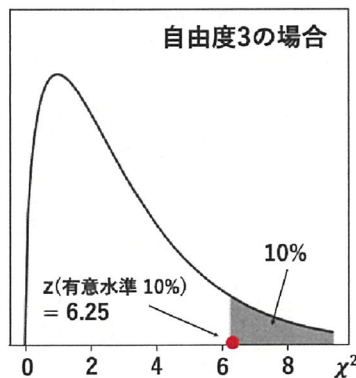


図 4: χ^2 分布の信頼区間の上限値 (z) のイメージ. 自由度が 3, 有意水準が 10% の場合の z を例示している.

第6問

磁場を用いた荷電粒子の物理量の測定について、様々なケースで考えてみよう。ここで、時間変化のない磁場を考え、一様磁場 B [T] 中を磁場の向きに垂直に運動する運動量 p [MeV/c]、曲率半径 r [m] の荷電粒子について

$$p = 3.0 \times 10^2 Br \quad (1)$$

が成り立つ。

【問1】

- (a) 荷電粒子の運動量、電荷の符号を測定する方法をそれぞれ簡単に答えよ。
- (b) ある空間に荷電粒子の飛跡を検出できる装置を設置し、そこに紙面に垂直方向に2 Tの一様磁場 B を発生させた。この装置に磁場の向きに垂直に荷電粒子が通過したところ、図1のような軌跡を測定することが出来た。この軌跡から装置両端の線分の中点から出た垂線 s の長さを測定したところ、20 cmであった。装置の長さ d が4 mのとき、この荷電粒子の運動量 [MeV/c] を有効数字2桁で求めよ。

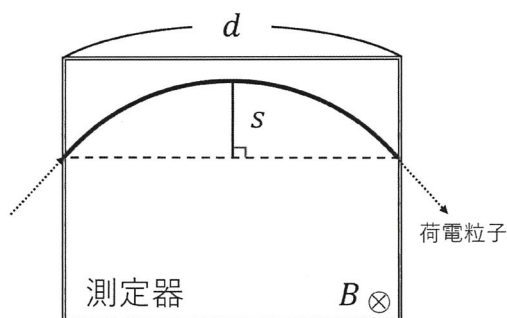


図1: 測定器による荷電粒子の飛跡測定。

【問2】

加速器では、荷電粒子の軌道を曲げるために、偏向電磁石とよばれる一様磁場を作る電磁石を用いる。ビームの平均運動量は【問1】(b)と同様の原理でこの電磁石を使って測定している。しかし、一般的にビームはほぼ同じ運動量を持つ荷電粒子の集団であるが、わずかに運動量の差がある。この運動量の広がり調べる方法を考えよう。

偏向電磁石に同じ位置、方向で入射した運動量がわずかに異なる荷電粒子の運動は、十分に長い距離 L 離れた観測位置で見ると、図2のようになる。ここで、運動量のわずかに異なる荷電粒子は偏向電磁石の同じ点 P から出たとみなすことが出来る。図2中の r 、 r' はそれぞれ運動量が p 、 $p - \Delta p$ の荷電粒子の曲率半径である。

- (a) 運動量 p の荷電粒子の出射角度 θ に対する運動量 $p - \Delta p$ の出射角度の差を $\Delta\theta$ としたとき、 $\sin \Delta\theta$ を $\frac{\Delta p}{p}$ の式で表せ。必要に応じて $|x| \ll 1$ の時の近似式

$$(1+x)^n \sim 1+nx \quad (2)$$

を用いてよい。

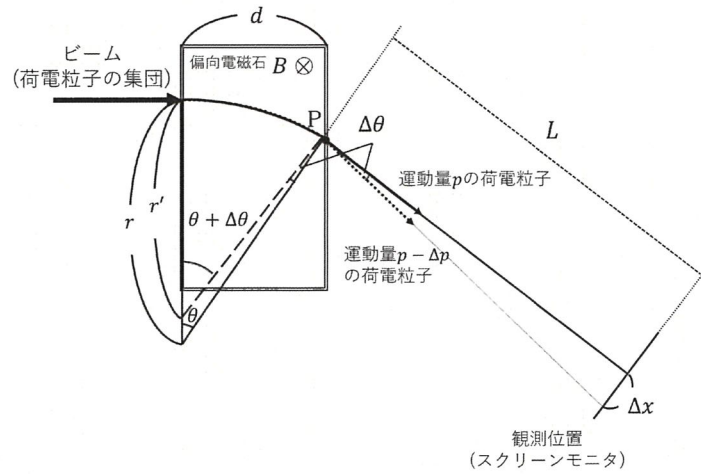


図 2: 運動量のわずかに異なる荷電粒子が異なる出射角度で運動する様子.

- (b) 偏向電磁石を出た荷電粒子は真空中を通り、 L 離れた観測位置にある、ビームの像を映してビームを観測するためのスクリーンモニタに到達したとき、運動量の違い (出射角度の違い) によって、荷電粒子ごとにスクリーン上の別の位置に到達する. この位置の差 Δx が

$$\Delta x = L \sin \theta \cdot \frac{\Delta p}{p} \quad (3)$$

となることを示せ. ここで、 $\Delta \theta \ll 1$ のため $\tan \Delta \theta \sim \sin \Delta \theta$ であることを使ってよい.

- (c) ある加速器で電子ビームの加速を行い、加速された電子ビームが長さ $d = 0.96$ m の偏向電磁石に到達して角度 10° 曲げられ、6.6 m 先の観測位置にスクリーンを設置してビームの像を確認したところ、図 3 のようであった. 図中の Δx を運動量の広がりからくるビームの大きさとする.

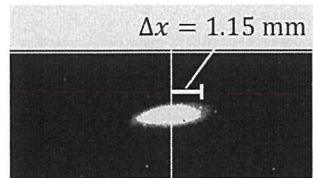


図 3: スクリーンで見たビームの像.

このとき、ビームがスクリーンの中心を通るように偏向電磁石の強さを調整した (細かい縦線が中心). その結果、電磁石の磁場の強さは 0.18 T であった. このことから電子ビームの平均運動量 p [MeV/c], 運動量の広がり Δp [MeV/c], およびビームエネルギー E [MeV] を有効数字 2 桁で求めよ. ただし、 E は相対論により

$$E^2 = (pc)^2 + (m_e c^2)^2 \quad (4)$$

で与えられる.

ここで、 c は光速、電子の質量は $m_e = 0.511$ MeV/c² であり、 $\sin 10^\circ = 0.174$ とする.

【問3】

加速器では、偏向電磁石の他に、レンズのようにビームを収束するための電磁石も使われる。ここでは、このような電磁石を用いた測定について考える。ただし、電子ビーム中の電子の運動量は同じとする。

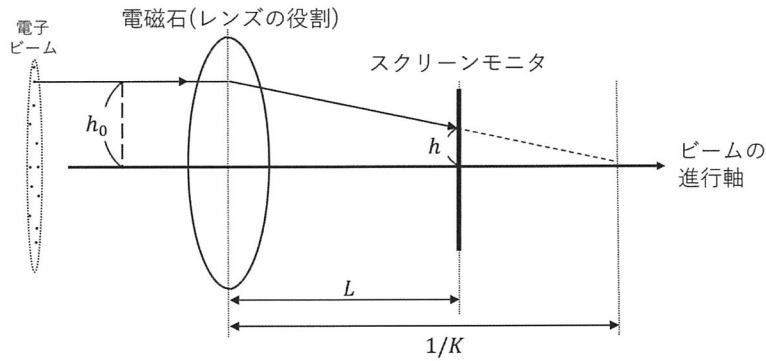


図 4: レンズと同じ役割を果たす電磁石を用いたときの電子の運動の様子。

- (a) 電子ビーム中の高さ h_0 でビームの進行軸に平行に進む電子は、この電磁石によって電磁石の強さ K （光学におけるレンズの焦点距離 f の逆数に相当）に従い、図 4 のような運動をする。このとき、電磁石から距離 L に設置されたスクリーンモニタ上での高さ h を求めよ。
- (b) K を変えることでスクリーン上での h は変化し、 h^2 が図 5 のように K の 2 次式で変わることがわかっている。今、 K の値を 3 回変えてスクリーン上の h を測定したところ、表 1 のようになった。このことから、 h がスクリーン上で最小となる K とそのときの h を有効数字 2 桁で推定せよ。

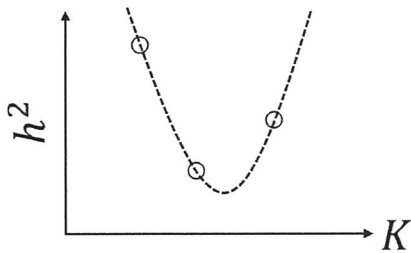


表 1: K の強さと測定された h の関係。

K の強さ [m^{-1}]	h [μm]
0.35	510
0.98	300
1.12	400

図 5: K の強さと h^2 の依存性。