総合研究大学院大学先端学術院

加速器科学コース・素粒子原子核コース

５年一貫制博士課程入学試験問題

数　学

令和７年８月２０日（水）１０時００分～１０時５０分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること．

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること．

☆ 試験問題（２問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること．

☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第〇〇問□□枚目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること．

解答できない場合も，受験番号，氏名，問題番号を記入し，提出すること．

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に知らせること．

第１問

行列

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

に関して，次の問いに答えよ．

【問１】

行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．固有ベクトルはノルムが 1 になるよう規格化し，第 1 成分が正になるよう符号を選べ．

【問２】

任意の 2 次元実ベクトル $\vec{x}$ に対して，

$$\vec{x}^{\,t} A \vec{x} \geq 0 \tag{2}$$

となることを示せ．ここで，$\vec{x}^{\,t}$ は $\vec{x}$ の転置を表す．

【問３】

行列

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

を考える．この行列の固有値のうちで，最大固有値と最小固有値，また，それぞれに対応する規格化された固有ベクトルを決定せよ．規格化された固有ベクトルの第 1 成分は正になるよう符号を選べ．

第２問

3 次元ベクトル $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$

$$A_x = 3x^2y + yz, \qquad A_y = x^3 + xz, \qquad A_z = xy + x + z \tag{4}$$

に関して，次の問いに答えよ．

【問１】

$\vec{\nabla} \times \vec{A}$ と $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ を計算せよ．

【問２】

積分

$$\int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{x} \tag{5}$$

を計算せよ．ここで，積分経路 C_1 は始点を $(x, y, z) = (0, 0, 0)$，終点を $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ とする経路で，次の式で与えられる（図 1 も参照）．

$$C_1: \quad (x, y, z) = \begin{cases} (s, 0, 0) & \text{for } 0 \leq s \leq 1 \\ (1, s-1, 0) & \text{for } 1 \leq s \leq 2 \end{cases} \tag{6}$$

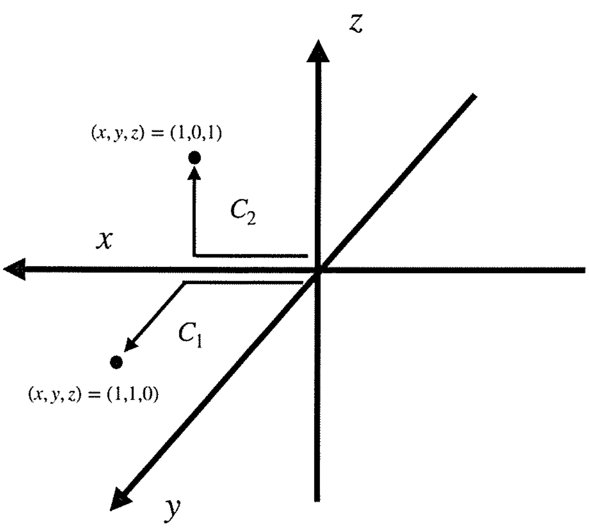

図 1: 積分経路 C_1 と C_2.

【問３】

積分

$$\int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{x} \tag{7}$$

を計算せよ．ここで，積分経路 C_2 は次の式で与えられる（図 1 も参照）．

$$C_2: \quad (x,y,z) = \begin{cases} (s,0,0) & 0 \le s \le 1 \text{ のとき} \\ (1,0,s-1) & 1 \le s \le 2 \text{ のとき} \end{cases} \tag{8}$$

【問４】

始点 $(0,0,0)$ と終点 $(1,1,0)$ を保ったまま，積分経路 C_1 を xy 平面内で変形する．この時に，積分結果が変わるかどうかを示せ．ただし，ストークスの定理

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n}\, dS = \int \vec{A} \cdot d\vec{x} \tag{9}$$

を用いよ．ここで，左辺は $\vec{n}$ を法線ベクトルとする面 S での積分で，右辺は S の境界に沿った経路での積分である．

【問５】

【問４】と同様に，始点 $(0,0,0)$ と終点 $(1,0,1)$ を保ったまま，積分経路 C_2 を xz 平面内で変形する．ストークスの定理を用いて，積分結果が変わるかどうかを示せ．