

総合研究大学院大学先端学術院
加速器科学コース・素粒子原子核コース
5年一貫制博士課程入学試験問題
専門科目

令和6年8月21日（水）13時00分～16時00分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること．

☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること．

☆ 6問の中から，4問を選んで解答せよ．

ただし、素粒子原子核コース理論部門を志望する（志望順位を問わ
ず）受験者は第1問及び第2問を必ず選択しなければならない。

☆ 試験問題（4問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること．

☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第〇〇問□□枚
目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用紙の
順番を記入すること．解答できない場合も，受験番号，氏名，問題
番号を記入し，提出すること．

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に知
らせること．

第 1 問

量子力学において、まず 1 次元でのポテンシャルの問題を考える．ポテンシャル $U(x)$ は原点について折り返し対称な井戸型ポテンシャルとし、以下のように与えられている．

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases} \quad U_0 \text{ は実数定数, } a \text{ は正の定数} \quad (1)$$

以降では定常状態を考える．粒子の質量を $m (> 0)$ ，波動関数を $\varphi(x)$ ，系のエネルギーを E とすると，Schrödinger 方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \varphi(x) = E \varphi(x) \quad (2)$$

である． $\hbar$ は換算プランク定数である．

【問 1】

ここでは実数定数 U_0 が負であり，束縛状態を考えることにする．($U_0 < E < 0$)

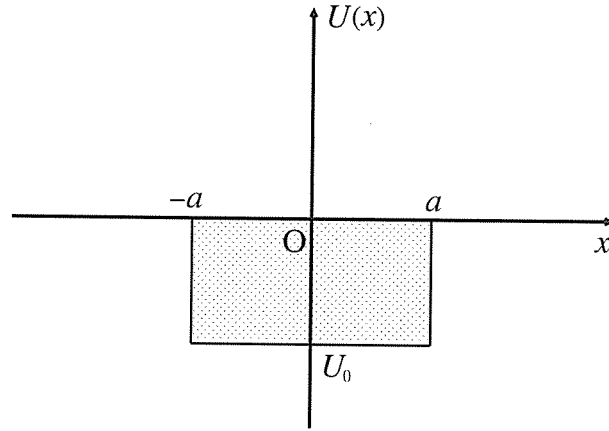


図 1: 対称ポテンシャル $U(x)$ の様子．(引力の場合)

- (a) 対称ポテンシャルの場合，束縛状態の波動関数は偶関数か奇関数であり，それらはエネルギー的に縮退せず，独立に存在する．そこで波動関数が偶関数と奇関数，各々の場合について束縛状態を求める方程式を導け．その際，以下で定義される η ， ξ 及び R を用いよ．

$$\eta = a \sqrt{2m|E|/\hbar^2}, \quad \xi = a \sqrt{2m(E - U_0)/\hbar^2}, \quad R = a \sqrt{2m|U_0|/\hbar^2} \quad (3)$$

- (b) 波動関数が偶関数・奇関数いずれかの場合には，常に束縛状態が少なくとも 1 つ存在する．設問 (a) で求めた方程式を (ξ, η) 平面でグラフに表すことによって，常に束縛状態が存在するのは偶関数・奇関数どちらの場合であるか示せ．
- (c) ポテンシャルが十分浅く，

$$|U_0| \ll \frac{\hbar^2}{2ma^2} \quad (4)$$

であるとき，設問 (b) で存在を示した束縛状態のエネルギー E を U_0 について最低次まで求めよ．(ヒント：設問 (a) で求めた方程式を条件式 (4) を考慮した上で， η について解くとよい．)

次に、スピン 1/2 の二つのフェルミ粒子が存在する 3 次元問題を考える。2 粒子の相対運動に関するハミルトニアンは、次のように与えられているとする。

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V_{12} \quad (5)$$

ここで $\mathbf{r} = (x, y, z)$ は 2 つの粒子の相対座標ベクトル、 V_{12} は 2 粒子間に働くポテンシャルであり、 $\mu (> 0)$ は 2 粒子の換算質量である。

ここでポテンシャル V_{12} が次のようなものであったとする。

$$V_{12} = (\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2) \{U(x) + U(y) + U(z)\} \quad (6)$$

演算子 $\hat{s}_i$ は i 番目 ($i = 1, 2$) の粒子に作用するスピン演算子であり、 $\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2$ はそれらの内積である。 $U(x)$ は【問 1】の式 (1) で与えられた x 座標に関する 1 次元対称ポテンシャルであり、 $U(y)$, $U(z)$ はそれを y, z 座標で適用したものである。ただしここでは、式 (1) に現れるポテンシャルの強さ U_0 は正負どちらの符号もとりにえるとする。

なおスピン 1/2 状態はスピン z 成分の演算子の固有値として $\pm\hbar/2$ をとるが、ここではその固有状態を $+\hbar/2$ に対してはアップ ($\uparrow$)、 $-\hbar/2$ に対してはダウン ($\downarrow$) と表現する。つまり i 番目粒子のスピン固有状態は以下のである。

$$\hat{s}_{z,i} |\uparrow\rangle_i = +\frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle_i, \quad \hat{s}_{z,i} |\downarrow\rangle_i = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle_i \quad (7)$$

ここで $|\uparrow\rangle_i, |\downarrow\rangle_i$ 各々は規格化されている。

【問 2】

合成スピン演算子 $\hat{S}$ は 1 番目、2 番目の粒子に対するスピン演算子を用いて $\hat{S} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$ である。2 つのスピン 1/2 状態からは、大きさ S が 0 と 1 の合成スピン状態を作ることができる： $|S = 0, S_z = 0\rangle, |S = 1, S_z = M\rangle$ ($M = -1, 0, 1$)。これら各々を以下の手順に従い、 $|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2, |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2, |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2, |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$ の線形結合で表現せよ。その際規格化もしておくこと。

- 合成スピンの z 成分が最大である $|S = 1, S_z = +1\rangle$ を表せ。
- 設問 (a) で書いた $|S = 1, S_z = +1\rangle$ に下降演算子 $\hat{S}_- = \hat{s}_{-,1} + \hat{s}_{-,2}$ を逐次作用させることで、 $S = 1$ の残りの状態を作れ。なお i 番目スピンに対する下降演算子 $\hat{s}_{-,i}$ は次のように働く。 $\hat{s}_{-,i} |\uparrow\rangle_i = \hbar |\downarrow\rangle_i, \hat{s}_{-,i} |\downarrow\rangle_i = 0$ 。
- 設問 (b) で求めた $|S = 1, S_z = 0\rangle$ に直交するように、 $|S = 0, S_z = 0\rangle$ を作れ。

【問 3】

【問 2】で作った合成スピン状態 $|S = 1, S_z = M\rangle$ と $|S = 0, S_z = 0\rangle$ の表式を見て、以下の問いに答えよ。

- 粒子の入れ替えに対して対称なものと反対称なものに分類せよ。
- 合成スピン状態 $|S = 1, S_z = M\rangle$ と $|S = 0, S_z = 0\rangle$ は演算子 $\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2$ の固有状態である。各々に対して $\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2$ の固有値を求めよ。

【問 4】

式 (5) で与えられたハミルトニアン H の固有状態 $|\Psi_E\rangle$ を考える。【問 3】の設問 (b) よりこのハミルトニアンの固有状態は、合成スピンの大きさの演算子の固有状態である。ゆえに固有状態は空間波動関数とスピン波動関数の直積で表せる： $|\Psi_E\rangle = \Phi(\mathbf{r})|S, M\rangle$ 。【問 1】及び【問 3】を踏まえて、以下の問いに答えよ。

- (a) 2つの粒子 1, 2 がフェルミ粒子であることから、波動関数の空間部分 $\Phi(\mathbf{r})$ とスピン部分 $|S, M\rangle$ には、粒子の入れ替えに対する対称性に関係がつく。スピン状態 $S = 0, 1$ と空間波動関数 $\Phi(\mathbf{r})$ の偶奇性の関係を述べよ。
- (b) ポテンシャル V_{12} は式 (6) のように x, y, z 座標各々についてのポテンシャルの和となっている。式 (5) のハミルトニアン H も x, y, z 座標各々に対するハミルトニアン H_x, H_y, H_z の和となる： $H = H_x + H_y + H_z$ 。この時 x 座標に関するハミルトニアン H_x を、式 (5), (6) の記号を用いて記せ。
- (c) 式 (6) で示されるポテンシャル V_{12} は、式 (1) で与えられるポテンシャルの強さ U_0 をもつ。この U_0 の符号が正・負いずれかの場合に、必ず少なくとも 1 つ束縛状態が存在する。束縛状態が必ず存在する U_0 の符号を、理由も合わせて述べよ。その際、その束縛状態の空間波動関数の偶奇性、及びスピン状態を説明すること。

ヒント：上の設問 (b) で述べたようなハミルトニアン H では、一般には空間波動関数は x, y, z 座標に関する波動関数の積の線形結合となる。今の場合、この束縛状態はエネルギー最低状態であるため、空間波動関数 $\Phi(\mathbf{r})$ は $\phi_x(x)\phi_y(y)\phi_z(z)$ のように積の形となる。

【問 5】

【問 4】の設問 (c) の本質は最初に考えた 1 次元の問題にある。その【問 1】の設問 (b) の結論「偶関数・奇関数どちらかの波動関数には、常に束縛状態が少なくとも 1 つ存在する」は、以下のように考えると矛盾しているように思える。この考え方のどこが物理的に間違っているのか述べ、その理由を説明せよ。

ポテンシャルの広がり a が $2a$ なので束縛状態の広がりも同程度であり、位置の不確定さ Δx は $2a$ である。位置の不確定さ Δx と運動量の不確定さ Δp には $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ というハイゼンベルクの不確定性関係がある。ゆえに $\Delta p \geq \hbar/4a$ となるから、運動エネルギーは $T = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{16a^2}$ 程度になることができる。すると a を小さくするとポテンシャルの深さ $|U_0|$ より T は大きくできて、系のエネルギー $E = T + U_0$ は正となり束縛状態でなくなる。(注：ここでは $U_0 < 0$ である。)

第2問

【問1】

N 個の独立な調和振動子からなる系を考える．各調和振動子のエネルギーは量子化され， i 番目の調和振動子の角振動数を ω_i とおくと，そのエネルギーは $\epsilon_i = (n_i + 1/2)\hbar\omega_i$ で与えられる．ここで， n_i は非負の整数， $\hbar$ は換算プランク定数， $\hbar\omega_i/2$ は零点振動の寄与を表す．系の温度を T とし，各調和振動子を部分系と考えて以下の問いに答えよ．

(a) カノニカル分布を仮定し各調和振動子の分配関数を

$$Z_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta\epsilon_i} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1)$$

とする．ただし， $\beta = 1/(k_B T)$ は逆温度， k_B はボルツマン定数である．これを用いて全系の分配関数が

$$Z = \prod_{i=1}^N Z_i \quad (2)$$

と書けることを示せ．

(b) 同様にカノニカル分布を仮定すると各調和振動子のエネルギーの期待値 E_i ，自由エネルギー F_i が

$$E_i = \frac{\hbar\omega_i}{2} + \frac{\hbar\omega_i}{e^{\beta\hbar\omega_i} - 1}, \quad (3)$$

$$F_i = \frac{\hbar\omega_i}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega_i}) \quad (4)$$

で与えられることを示せ．また，全系のエネルギー期待値 E と自由エネルギー F が，それぞれ，

$$E = \sum_{i=1}^N E_i, \quad F = \sum_{i=1}^N F_i \quad (5)$$

と書けることを示せ．

【問2】

次に空洞放射を考える．一辺の長さが L の立方体の空洞が黒体の壁で囲われ，その温度が T に保たれているとする．空洞内の電磁波は熱平衡に達しているとし，その運動は無限個の調和振動子の集まりとして記述できる．各調和振動子は波数ベクトル $\mathbf{k}$ と， $\mathbf{k}$ に垂直な平面内での横波の振動を表す偏光の自由度 $\sigma = 1, 2$ で特徴づけられ，電磁場の全エネルギー E や全自由エネルギー F は $\mathbf{k}$ と σ についての和で与えられる．また，角振動数は光速 c を用いて $\omega = c|\mathbf{k}|$ で与えられる．以下の問いに答えよ．ただし，零点振動の寄与は無視せよ．

(a) 周期境界条件を課すと，波数ベクトル $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ は

$$k_x = \frac{2\pi}{L}m_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L}m_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L}m_z \quad (6)$$

と量子化される。ただし、 m_x, m_y, m_z は整数である。以下では、 k についての和を角振動数 ω についての積分で近似することを考える。角振動数の微小な範囲 $[\omega, \omega + d\omega]$ に含まれる状態数、即ち、 k と σ の組み合わせの数が近似的に

$$D(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega \quad (7)$$

で与えられることを示せ。ここで、 $D(\omega)$ は角振動数に対する状態密度、 $V = L^3$ は空洞の体積を表す。

- (b) 【問 1】の設問 (b) で求めた 1 つの調和振動子のエネルギー期待値と、【問 2】の設問 (a) で求めた状態密度 $D(\omega)$ を用いて電磁波の全エネルギー E の表式を求め、 T^4 に比例することを示せ（ステファン-ボルツマンの法則）。ただし、定積分

$$\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (8)$$

を使ってよい。

- (c) エネルギーの量子が $\hbar\omega \ll 1/\beta$ と小さく、古典統計力学でよく記述できる場合に、各調和振動子のエネルギー期待値が ω によらず等しくなること（エネルギー等分配則）を示せ。また、電磁場の全エネルギーを【問 2】の設問 (b) と同様に計算すると、古典近似が破綻する大きい角振動数の寄与により発散することを示せ。
- (d) 【問 1】の設問 (b) で求めた 1 つの調和振動子の自由エネルギーと、【問 2】の設問 (a) で求めた状態密度 $D(\omega)$ を用いて電磁波の圧力 p の表式を求め、 $p = E/(3V)$ であることを示せ。ただし、

$$\lim_{x \rightarrow +0} x [\ln(x)]^n \rightarrow 0 \quad (n = 1, 2, 3) \quad (9)$$

を使ってよい。

第3問

ラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ としてオイラー-ラグランジュ方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (1)$$

で表される. なお' (ドット) は時間微分演算子 d/dt をしめす. また $q = (q_1, \dots, q_N)$ と $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$ は力学変数とその時間微分の全体を表す. N は変数の個数, t は時間である.

ハミルトニアン $H(q, p, t)$ を,

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (2)$$

と定義する. ただし $p = (p_1, \dots, p_N)$ は力学変数に対応した運動量の全体を表す. また,

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (3)$$

である.

上記の方程式をもちいて下記の質問に答えよ.

下記のラグランジアンで記述される質量 $m (> 0)$ の質点の運動を2次元極座標系 $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ で考える. ただし $r > 0$, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ とする. 運動は非相対論的に取り扱うものとする.

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + k \frac{\dot{\phi}}{r} \quad (4)$$

k は正の定数である.

【問1】

座標 r , ϕ に共役な運動量 p_r , p_ϕ を求めよ.

【問2】

変数 p_r , p_ϕ を用いてオイラー-ラグランジュ方程式を書き下せ. また p_ϕ が保存することを示せ.

【問3】

$d\phi/dt$ を p_ϕ を用いて表せ.

【問4】

【問1】の結果を用いてハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\phi - \frac{k}{r} \right)^2 \right] \quad (5)$$

を導出せよ.

【問5】

【問4】で導出されたハミルトニアンからエネルギー保存則

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left(p_\phi - \frac{k}{r} \right)^2 = E \quad (6)$$

が導かれる． dr/dt を求めよ．

以下では簡単のために $p_\phi = 0$ の場合を考えることにする．時間変数 t を消去して軌道方程式

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm \frac{1}{k} r^3 \sqrt{2m \left(E - \frac{k^2}{2mr^4} \right)} \quad (7)$$

を導出せよ．

【問6】

式 (7) の軌道方程式は

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm Ar \sqrt{r^4 - r_0^4} \quad (8)$$

の形に書き直される．定数 $r_0 (> 0)$ ， A を求めよ．ただし定数 A は r_0 の関数 $A = f(r_0)$ の形で示せ．

【問7】

【問6】の微分方程式を，初期条件 $\phi = 0$ のとき $r = r_0$ の下で解き， r_0 ， ϕ の関数 $r^2 = g(r_0, \phi)$ の形式で示せ（変数変換 $r_0^2/r^2 = u$ を用いるとよい）．

ただし

$$\frac{d}{du} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \quad (9)$$

の関係式を用いてよい．

【問8】

【問7】の結果から質点は無限遠 ($r = +\infty$) から飛来して $r = r_0$ で原点 $(x, y) = (0, 0)$ に最接近し，また無限遠へ飛び去っていくことがわかる．このときの角度変化の絶対値 $|\Delta\phi|$ を求めよ．

第4問

エバネッセント波を議論する．エバネッセント波は走査型近接場光顕微鏡などに応用されている電磁波現象である．

図1において屈折率が異なる二種類の媒質が境界面で接している．入射電磁波は媒質Ⅰを伝搬し媒質Ⅱへ向い媒質ⅠとⅡの境界面で全反射するものとし，媒質Ⅱへ染み出した電磁波がエバネッセント波である．以下，媒質Ⅰを真空以外の任意の媒質とし，媒質Ⅱを真空とする．次の【問1】および【問2】に答えよ．解答中では下に示した公式を用いてよい．

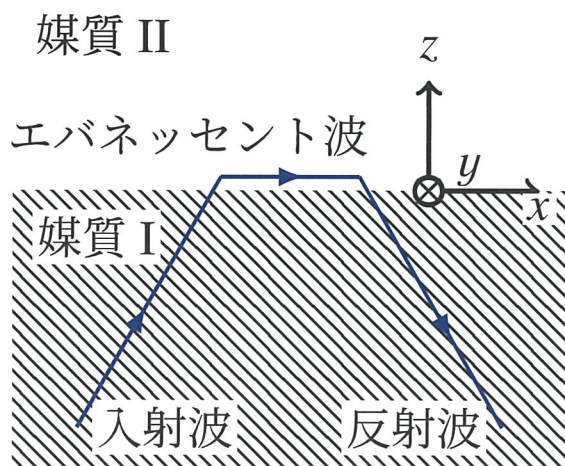


図1: 媒質同士の境界面に入射する入射波，反射される反射波，および媒質Ⅱ側へ染み出すエバネッセント波．

電荷密度と電流密度がゼロである空間におけるマックスウェル方程式は以下のとおりである． ε および μ は任意の誘電率および透磁率である．

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2) \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (4)$$

任意のスカラーを f ，任意のベクトルを $\mathbf{A}$ で表すと以下のベクトル解析の公式が得られる．

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{A})f, \quad (5)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + (\nabla \times \mathbf{A})f, \quad (6)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (7)$$

【問1】

エバネッセント波に取り組む前に、まず簡単のため真空中を伝搬する平面電磁波を考えよう．図2は真空中を伝搬する平面電場 $E(x, y, z, t)$ を示している．以下、簡単のため x, y, z をまとめて r と表記し、 $E(x, y, z, t) \equiv E(r, t)$ の x, y, z 成分は

$$E(r, t) = (E_x(r, t), E_y(r, t), E_z(r, t)) \quad (8)$$

$$= (0, E_0 e^{i(kx - \omega t)}, 0) \quad (9)$$

で与えられるとする． E_0 は振幅、 k は波数、 ω は角周波数でありそれぞれ実定数とする． t は任意の時刻である．真空中では誘電率が ϵ_0 、透磁率が μ_0 であるとし、電荷密度と電流密度はゼロとする．

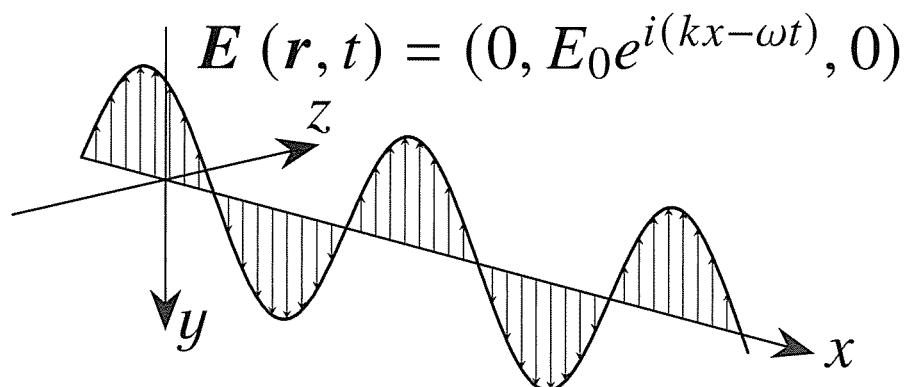


図2: 真空中を伝搬する平面電場．

- 電場 $E(r, t)$ に対応し真空中を伝搬する磁場を $B(r, t)$ とする． $B(r, t)$ の x, y, z 成分を求めよ．ただし、 $B(r, t)$ は角周波数 ω を持つ平面波という事実を用いてよい．
- 電磁波が任意の方向へもたらす単位時間・単位面積あたりのエネルギーは複素ポインティング・ベクトル $S(r, t) \equiv \frac{1}{\mu_0} (E(r, t) \times B^*(r, t))$ で得られる． $S(r, t)$ の x, y, z 成分を求めよ．なお、 $B^*(r, t)$ は磁場 $B(r, t)$ の複素共役である．

【問2】

いよいよエバネッセント波に着目する．ここでは，媒質Ⅱつまり真空中へ染み出し伝搬するエバネッセント波のみを考える．エバネッセント波の電場 $E(r, t)$ の x, y, z 成分は

$$E(r, t) = (E_x(r, t), E_y(r, t), E_z(r, t)) \quad (10)$$

$$= (0, E_0 e^{i(kx - \omega t) - hz}, 0) \quad (11)$$

で与えられるとする． h は実定数である．【問1】と同様， E_0, k, ω はそれぞれ実定数であり， t は任意の時刻である．以下の問いに答えよ．

- 電場 $E(r, t)$ に対応し真空中を伝搬する磁場を $B(r, t)$ とする． $B(r, t)$ の x, y, z 成分を求めよ．ただし， $B(r, t)$ は角周波数 ω を持つ平面波という事実を用いてよい．
- 電磁波が任意の方向へもたらす単位時間・単位面積あたりのエネルギーは複素ポインティング・ベクトル $S(r, t) \equiv \frac{1}{\mu_0} (E(r, t) \times B^*(r, t))$ で得られる． $S(r, t)$ の x, y, z 成分を求めよ．なお， $B^*(r, t)$ は磁場 $B(r, t)$ の複素共役である．
- 複素ポインティング・ベクトル $S(r, t)$ の実部 $\langle S(r, t) \rangle \equiv \frac{1}{2} \text{Re}[S(r, t)]$ は，単位時間・単位面積あたりのエネルギーの時間平均を与える．【問2】の設問(b)の解に対し， $\langle S(r, t) \rangle$ の x, y, z 方向の各成分を $z = 0$ の場合と $z = 1/h$ の場合についてそれぞれ求めよ．さらに， $\langle S(r, t) \rangle$ のゼロでない成分については， $z = 0$ の場合に対する $z = 1/h$ の場合の比を求めよ．
- マックスウェル方程式を用いて，真空中を伝搬する電場の波動方程式

$$\nabla^2 E(r, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(r, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

を導け．ただし，真空中で誘電率 ϵ_0 ，透磁率 μ_0 ，光速 c の間に成り立つ関係式 $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ を用いてよい．

- 式(12)にエバネッセント波の電場 $E(r, t)$ を代入し， h を波数 k ，角周波数 ω ，および光速 c を用いて表せ．また， $k = 1.2 \frac{\omega}{c}$ および波長 $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ が与えられる場合， $1/h$ を nm(ナノメートル)の単位で計算せよ．ここでエバネッセント波の波長は $\lambda = 420 \text{ nm}$ とする．数値計算は有効数字二桁まで導出し，以下の平方根表を用いてよい．

平方根表

$$\begin{aligned} \sqrt{1} &= 1.00, & \sqrt{2} &= 1.41, & \sqrt{3} &= 1.73, & \sqrt{4} &= 2.00, & \sqrt{5} &= 2.24, \\ \sqrt{6} &= 2.45, & \sqrt{7} &= 2.65, & \sqrt{8} &= 2.82, & \sqrt{9} &= 3.00, & \sqrt{10} &= 3.16, \\ \sqrt{11} &= 3.32, & \sqrt{12} &= 3.46, & \sqrt{13} &= 3.61, & \sqrt{14} &= 3.74, & \sqrt{15} &= 3.87, \\ \sqrt{16} &= 4.00, & \sqrt{17} &= 4.12, & \sqrt{18} &= 4.24, & \sqrt{19} &= 4.36, & \sqrt{20} &= 4.47, \\ \sqrt{21} &= 4.58, & \sqrt{22} &= 4.69, & \sqrt{23} &= 4.80, & \sqrt{24} &= 4.90, & \sqrt{25} &= 5.00. \end{aligned}$$

第5問

【問1】

ミュー粒子の崩壊現象について以下の問いに答えよ．その際，ある粒子について相対論的エネルギー E ，不変質量 M ，運動量 $\vec{P}$ ，光速 c は，

$$E^2 = M^2 c^4 + |\vec{P}|^2 c^2 \quad (1)$$

の関係にあることを用いてよい（以下では，単に相対論的エネルギーをエネルギー，不変質量を質量と呼ぶ）．ここでは簡単のために，ミュー粒子の質量は $M_\mu = 100 \text{ MeV}/c^2$ ，電子の質量は $M_e = 0.5 \text{ MeV}/c^2$ ，ニュートリノの質量は $0 \text{ MeV}/c^2$ とする（ $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ ）．解答が数値の場合，その有効数字は二桁とする．また，解答では，光速 c を省略する自然単位系を採用してもよい．

- (a) 通常のミュー粒子の崩壊では，崩壊後に1つの電子と2つのニュートリノが生成される．この崩壊についてエネルギー保存則と運動量保存則を表す式を記せ．ただし，ミュー粒子は静止しているものとする（運動量 $\vec{P}_\mu = 0$ ）．また，ミュー粒子の質量を M_μ （すなわち式 (1) により，ミュー粒子のエネルギーは $M_\mu c^2$ となる），崩壊後の電子，2つのニュートリノのエネルギーを E_e ， $E_{\nu 1}$ ， $E_{\nu 2}$ ，運動量を $\vec{P}_e$ ， $\vec{P}_{\nu 1}$ ， $\vec{P}_{\nu 2}$ とする．

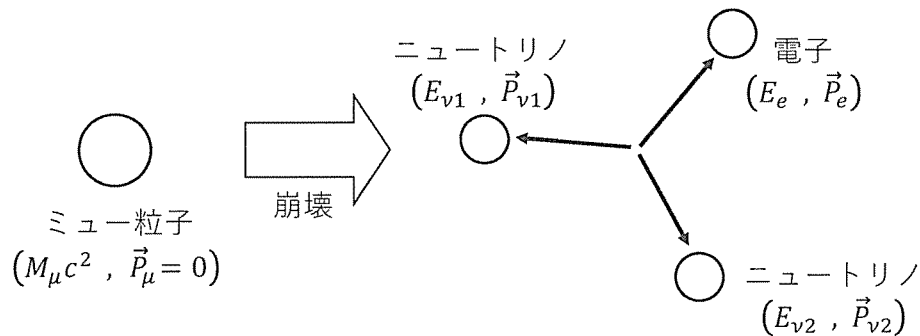


図 1: ミュー粒子の通常の崩壊

- (b) 【問1】の設問 (a) の崩壊では，3つの粒子が生成されるため，崩壊後の電子のエネルギーは一意には決まらない．電子のエネルギーが最大となる状況について説明し，そのときの電子のエネルギーを計算せよ．ただし，電子の質量 (M_e) はミュー粒子の質量 (M_μ) と比べて非常に軽いので， $\frac{M_e}{M_\mu} \ll 1$ としてもよい．

- (c) 【問1】の設問 (a), (b) では, ミュー粒子が3つの粒子に崩壊する場合を考えた. ここでは, ミュー粒子が (ニュートリノを含め他に何も粒子を放出せずに) 電子1つに崩壊する (転換する) 現象について考える. しかし, 自由空間で単独のミュー粒子が電子に転換することは禁止される. エネルギーと運動量の保存則を調べることによって, 禁止される理由を説明せよ.

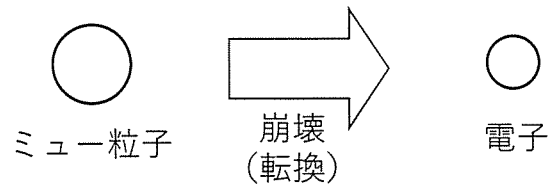


図 2: ミュー粒子から電子への崩壊 (転換)

- (d) 次に物質中において, ミュー粒子が電子に転換する現象を考える. 物質中では, ミュー粒子は原子核に束縛された状態となり, ミュー粒子が電子に転換する際に原子核が反跳を受けることによってエネルギー・運動量保存則が満たされる. この状態において, 発生した電子のエネルギーの大きさについて考察し, 通常 of ミュー粒子の崩壊と区別する方法について述べよ. ただし, 上記の物質の原子核の質量はミュー粒子の質量と比べて非常に大きいものとする.

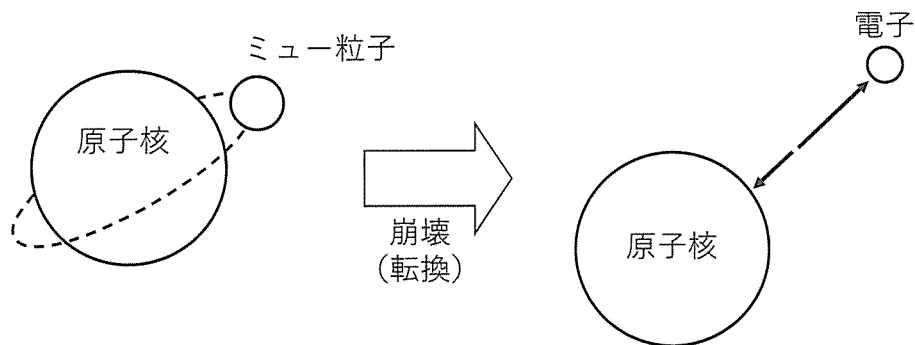


図 3: 原子核に束縛された状態でのミュー粒子から電子への崩壊 (転換)

【問2】

ミュー粒子は崩壊によって、その数を減らしていく。時刻 $t = 0$ において N 個あったミュー粒子は、時刻 t において平均的に $N \exp(-t/\tau)$ 個となる。ここで τ は寿命と呼ばれる値で、真空中に静止しているミュー粒子については 2.2 マイクロ秒 (2.2×10^{-6} 秒) である。以下の問いに答えよ。解答が数値の場合、その有効数字は二桁とする。

- (a) ある時点で真空中に静止している 1000 個のミュー粒子があったとき、そこから 22 ナノ秒後 (22×10^{-9} 秒後) にはミュー粒子は平均的に何個残っているか答えよ。ただし、 $\exp(-0.01) = 0.99$ と近似してよい。
- (b) 寿命が 2.2 マイクロ秒ということは、時刻 t から $t + \delta t$ の間に粒子が崩壊する確率が $4.5 \times 10^5 \times \delta t$ であることを説明せよ。 δt は微小時間 (単位は秒) を表す。なお、上記の 4.5×10^5 は壊変定数 (または崩壊定数) と呼ばれる値であり、その単位は 1/秒である。
- (c) ミュー粒子が物質中で停止したとき、通常の崩壊 (1つの電子と2つのニュートリノへの崩壊) に加えて、物質中の原子核に吸収されることによってミュー粒子は失われる。アルミニウム中に停止した場合、時刻 t から $t + \delta t$ の間にミュー粒子が原子核に吸収される確率は $7.0 \times 10^5 \times \delta t$ である (δt の単位は秒)。このときミュー粒子の寿命は何秒になるか計算せよ。ただし、通常の崩壊と原子核による吸収以外では、ミュー粒子は失われないものとする。

第6問

磁場中を進行する相対論的電子（以下では簡単に電子と呼ぶ）の動きについて考える．磁場の影響を受けた電子の運動方程式は以下のように表されることが知られている．

$$\gamma m \frac{dv}{dt} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

ここで、 $\gamma = \frac{E}{mc^2/e}$ は相対論におけるローレンツ因子、 E は電子のエネルギー [eV]、 B は磁場の磁束密度 [T]、 v は電子の速度 [m/s]、 t は時間 [s] である．また、

- 電子の静止質量 $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
- 光速 $c = 3 \times 10^8$ m/s
- 電気素量 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C

として以下の問いに答えよ．

【問1】

- (a) 図1に示すような2つの磁極間に一様な磁場分布を持つ電磁石（これを偏向電磁石と呼ぶ）に入射された電子の動きを考える．

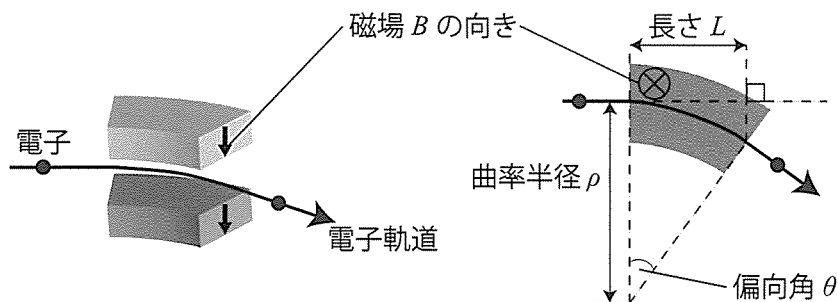


図 1: 偏向電磁石と電子の軌道．左図は斜め上から俯瞰，右図は上から俯瞰したもの．

電磁石の磁場 $B(=|\mathbf{B}|)$ によって、磁極間では電子は遠心力とローレンツ力が釣り合う条件で円弧の軌道（この曲率半径を ρ [m] と呼ぶ）を描きながら速度 $v(=|\mathbf{v}|)$ で進行する．このことから、

$$\gamma m v = \rho e B \quad (2)$$

が成り立つことを示せ．

- (b) このような偏向電磁石を図2のように複数用いて円環状に設置し，電子を周回させる装置（これを電子蓄積リングと呼ぶ）を設計する。

図1内で定義された長さ $L = 3 \text{ m}$ で偏向角 θ の偏向電磁石を 20 台用いてエネルギー $E = 900 \text{ MeV}$ の電子が周回する電子蓄積リングを設計する場合，1 台あたりに要求される磁束密度 $B \text{ [T]}$ はいくらになるか，小数点第一位まで答えよ。ただし， $\sin(2\pi/20) \simeq 0.3$ とし，電子の速度は $v \simeq c$ としてよい。

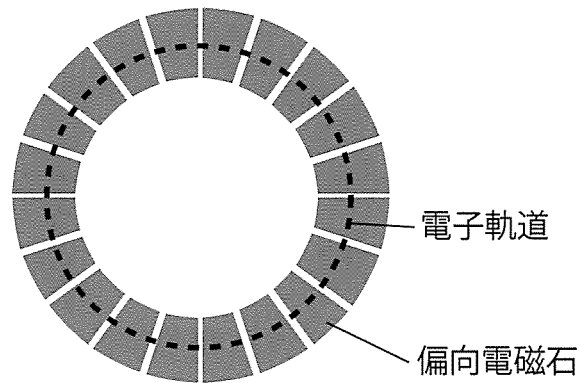


図 2: 複数の偏向電磁石で構成される電子蓄積リング。上面から俯瞰したもの。

【問2】

- (a) 次に、図3のように小型の磁極を交互に並べた装置（これをアンジュレータと呼ぶ）における電子の動きを考える。

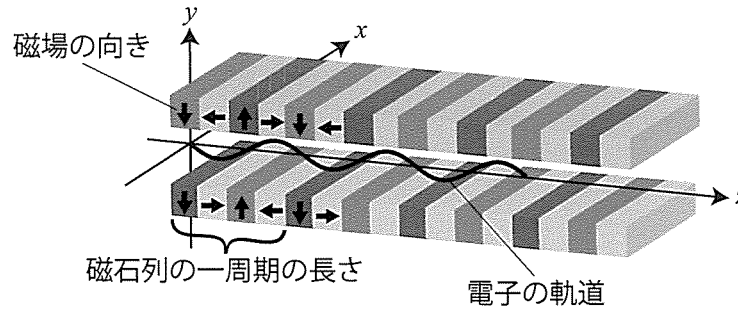


図 3: アンジュレータの磁石列と電子の蛇行軌道.

アンジュレータ内の磁場は $B_u(z) = [0, B_0 \cos(k_u z), 0]$ で表される周期的な磁場となっており、 B_0 は周期的磁場の最大磁束密度 [T]、 k_u は $2\pi/\lambda_u$ 、 λ_u は周期的磁場の周期長 [m] である。アンジュレータ内では、電子は周期的磁場によって x 方向に蛇行しながら z 軸に沿って進行していくが、この x 方向の動きに着目する。

光速に対する x 方向の電子の相対速度は

$$\frac{v_x}{c} = -\frac{K}{\gamma} \sin(k_u z) \quad (3)$$

と表されるが、 $dz = v_z dt$ を用いることにより、式 (3) の定数部分 K を e 、 B_0 、 k_u 、 m 、 c を用いて表せ。

- (b) アンジュレータは、通過する電子から高輝度な放射光を発生させる装置として利用されている。その放射光の波長 λ_r は、アンジュレータ中の電子の z 方向の動きを解析することで最終的には以下のように導出される。

$$\lambda_r = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} \right) \quad (4)$$

いま、エネルギー $E = 900$ MeV の電子に対し、周期長 λ_u が 18 mm、最大磁束密度 B_0 が 0.91 T のアンジュレータを採用した場合、このアンジュレータから放射される放射光の波長はいくらか。単位を mm とし、小数点第一位まで答えよ。ただし、電子の静止エネルギー mc^2/e を 0.5 MeV、円周率は $\pi = 3$ としてよい。

- (c) 【問2】(a)、(b) ではアンジュレータ磁場が y 方向のみの場合の電子の動きについて考えてきた。ここで、アンジュレータ磁場が $B_u(z) = [B_0 \sin(k_u z), B_0 \cos(k_u z), 0]$ である場合、電子は z 軸に沿ってどのような軌道を描きながら進行していくか、 x 、 y 、 z 方向の電子の速度を議論すると共に説明せよ。