総合研究大学院大学先端学術院
加速器科学コース・素粒子原子核コース
５年一貫制博士課程入学試験問題
数　学

令和６年８月２１日（水）９時３０分～１１時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること.

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること.

☆ 試験問題（４問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること.

☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第○○問□□枚目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること.

解答できない場合も，受験番号，氏名，問題番号を記入し，提出すること.

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に知らせること.

第１問

σ_k $(k=1,2,3)$ をパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

I を単位行列

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

a_k $(k=1,2,3)$，b を実数として

$$M = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 + b\,I \tag{3}$$

と定義する．また，v を実数として

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{4}$$

とするとき，次の問いに答えよ．

【問１】

$$M\vec{\phi} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5}$$

とするとき，$M\vec{\phi}$ の成分 x, y を a_k $(k=1,2,3)$，b で表せ．

【問２】

$M\vec{\phi}$ のノルム２乗 $|M\vec{\phi}|^2$ を

$$|M\vec{\phi}|^2 = x\,x^* + y\,y^* \tag{6}$$

と定義する．ここで x^*, y^* はそれぞれ x, y の複素共役である．$|M\vec{\phi}|^2$ は a_k $(k=1,2,3)$ および b の２次関数であり，

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b \end{pmatrix} \tag{7}$$

としたときある 4×4 行列 X を用いて

$$|M\vec{\phi}|^2 = \vec{w}^T X\,\vec{w} \tag{8}$$

と書ける．ここで $\vec{w}^T$ は $\vec{w}$ の転置ベクトルである．この 4×4 行列 X を求めよ．

【問３】

【問２】で求めた X の４つの固有値を求めよ．

第２問

【問１】

x，y を実数とするとき，積分 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-x^2-y^2}$ を $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ と変数変換することにより求めよ．

【問２】

ϵ を正の実数として，ϵ の関数 $f(\epsilon)$ を

$$f(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2-\epsilon x^4} \tag{9}$$

と定義する．$\epsilon << 1$ のとき，$e^{-\epsilon x^4}$ を $\epsilon = 0$ のまわりで ϵ でテイラー展開し，$e^{-x^2-\epsilon x^4}$ を x で項別に積分することにより $f(\epsilon)$ を ϵ の１次までの近似で求めよ．

第３問

次の積分の値を留数定理を使って求めよ．ただし，(b) の積分路は，複素平面の原点を中心とする半径 1 の円周上を反時計回りにとるものとする．

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^4+1}$

(b) $\displaystyle\oint_{|z|=1} dz \frac{z}{1-\cos z}$

第４問

t を実数とし，$\phi(t)$ を実数に値をとる t の関数とする．また，H および λ を $0 < \lambda < \dfrac{9H^2}{4}$ をみたす正の実定数とする．このとき $\phi(t)$ の t に関する微分方程式

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + 3H\frac{d\phi(t)}{dt} + \lambda\phi(t) = 0 \tag{10}$$

について次の問いに答えよ．

【問１】

独立な解を求めるために，α をある実数として $\phi(t) = e^{\alpha t}$ と仮定したとする．これが微分方程式の解となるように α を定めよ．

【問２】

$t = 0$ のとき初期条件 $\phi = \phi_0$，$\dfrac{d\phi}{dt} = -3H\phi_0$ をみたす解 $\phi(t)$ を求めよ．ただし ϕ_0 は正の実定数とする．

【問３】

【問２】の解 $\phi(t)$ が $\phi(t) = 0$ となる t を求めよ．