総合研究大学院大学先端学術院
加速器科学コース・素粒子原子核コース
５年一貫制博士課程入学試験問題
数　学

令和５年８月２３日（水）９時３０分～１１時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること.

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること.

☆ 試験問題（４問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること.

☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第〇〇問□□枚目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること.

解答できない場合も，受験番号，氏名，問題番号を記入し，提出すること.

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に知らせること.

第１問

3×3 行列

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

について考える．

【問１】
A^2 及び A^3 を計算せよ．

【問２】
【問１】の結果を用いて，$\exp(xA)$ を計算せよ．

【問３】
連立微分方程式

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2f(x) - 3g(x) + 2h(x), \\ g'(x) &= 2f(x) + 4g(x) - 2h(x), \\ h'(x) &= 2f(x) + 5g(x) - 2h(x) \end{aligned} \tag{1}$$

を初期条件 $f(0) = a,\ \ g(0) = b,\ \ h(0) = c$ の下で解け．ただし，「$'$」は x 微分を表す．

【問４】
【問３】の微分方程式 (1) の解が定数になる初期条件 $\{a, b, c\}$ をすべて求めよ．

第２問

実関数 $f(t)$ $(t \geq 0)$ に関する微分方程式

$$
\begin{aligned}
&f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = \sin t, \\
&f(0) = 0, \quad f'(0) = -1
\end{aligned}
\tag{2}
$$

をラプラス変換

$$
f(t) \to \mathcal{L}[f(t)](s) \equiv \int_0^\infty dt\ f(t) e^{-st}
$$

を用いて解く．ここで,「$'$」は t 微分を表す.

【問１】

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{at}](s) &= \frac{1}{s-a}, \qquad (a：\text{正定数}) \\
\mathcal{L}[\sin t](s) &= \frac{1}{s^2+1}, \\
\mathcal{L}[\cos t](s) &= \frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

を示せ．ただし，$\mathcal{L}[e^{at}](s)$ は $s > a$ で，$\mathcal{L}[\sin t](s)$ と $\mathcal{L}[\cos t](s)$ は $s > 0$ で定義されているとする.

【問２】

微分方程式 (2) の両辺をラプラス変換することで, $f(t)$ のラプラス変換は

$$
\mathcal{L}[f(t)](s) = \sum_{i=1}^{2} \frac{A_i}{s-s_i} + \frac{Bs+C}{s^2+1}
$$

の形で表されることが分かる．定数 A_1, A_2, s_1, s_2, B, C を求めよ.
ここで，$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = \lim_{t\to\infty} f'(t)e^{-st} = 0$ を仮定してよいとする.

【問３】

【問１】,【問２】の結果を用いて $f(t)$ を求めよ.

第３問

２つの微分可能な実関数 $u(x,y)$ と $v(x,y)$ を組み合わせて

$$f(x,y) \equiv u(x,y) + iv(x,y)$$

を定義する．これは，複素変数 $z \equiv x+iy$ と $\bar{z} = x - iy$ の関数

$$g(z,\bar{z}) \equiv f(x,y) \tag{3}$$

ともみなせる．

【問１】
この関数の z による微分を考えるために，

$$R(z,\bar{z},\zeta,\bar{\zeta}) \equiv \frac{g(z+\zeta,\bar{z}+\bar{\zeta}) - g(z,\bar{z})}{\zeta}$$

の $\zeta \to 0$ での値を調べる．この極限値は複素平面上でどの方向から ζ をゼロに近づけるかによって異なる値をとりうる．このことを具体的にみるために，$\zeta = re^{i\theta}$ (r, θ は実数) と表し，

$$S(x,y,\theta) \equiv \lim_{r\to 0} R(z,\bar{z},re^{i\theta},re^{-i\theta}) \tag{4}$$

を関数 $f(x,y)$ の偏微分を用いて表せ．

【問２】
極限値 (4) が θ に依存しない必要十分条件は，コーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x,y) \tag{5}$$

で与えられることを示せ．

【問３】
条件 (5) が成り立つとき，(3) は z による微分が定義でき，解析関数と呼ばれる．このとき，(3) が $\bar{z}$ に依存しないことを示せ．

【問４】
【問３】の結果を考慮して，(5) を満たす関数 (3) を $h(z)$ と記す．$u(x,y) = x^2 - y^2 + 3x + y$ となる解析関数 $h(z)$ を求めよ．ただし，$h(0) = 0$ とする．

【問５】
$u(x,y) = \sin x$ となる解析関数は存在しないことを条件 (5) を用いて証明せよ．

第４問

２次元ベクトル $\vec{A}$ を考える．直交座標系 (x, y) における各成分は，

$$A_x(x, y) = x^2 - y^2 - 3x, \qquad A_y(x, y) = 2xy - 3y$$

で与えられるとする．

【問１】

直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係は $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ で与えられる．$\vec{A}$ の極座標表示での成分 $A_r(r, \theta)$, $A_\theta(r, \theta)$ を

$$A_x(x, y)dx + A_y(x, y)dy = A_r(r, \theta)dr + A_\theta(r, \theta)d\theta$$

を用いて求めよ．

【問２】

以下の線積分を計算せよ．

$$I_C = \oint_C d\vec{s} \cdot \vec{A}$$

ここで，積分経路 C は原点を中心とする半径 R の半円 C_1 と x 軸上の線分 C_2 からなり，$d\vec{s}$ は C 上の線素を表す．(下図参照)

【問３】

面積分

$$I_D = \iint_D drd\theta \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$$

を具体的に計算し，I_D と I_C の関係性を述べよ．

ただし，積分領域 D は【問２】の C によって囲まれた領域を表す．(下図参照)