

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究所

5年一貫制博士課程入学試験問題

専門科目

令和4年10月25日（火）13時00分～16時00分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。

☆ 6問の中から、4問を選んで解答せよ。

ただし、素粒子原子核専攻理論部門を志望する（志望順位を問わず）受験者は第1問及び第2問を必ず選択しなければならない。

☆ 試験問題（4問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること。解答できない場合も、受験番号、氏名、問題番号を記入し、提出すること。

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に知らせること。

第1問

【問1】

半径 R の円周上を動く粒子の量子力学を考えよう。ラグランジアンとして

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 \quad (1)$$

をとる。ここで、 m は粒子の質量、 q は円周上の座標であり、 \dot{q} は q の時間微分を意味する。

(1) 上のラグランジアンから、オイラー・ラグランジュ方程式、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2)$$

を計算せよ。

(2) 正準形式に従い、系の正準運動量 p とハミルトニアン H を書き下せ。ここで、 p と H は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad H = p\dot{q} - L \quad (3)$$

で定義されることを用いよ。ただし、 H は \dot{q} を含まない形で書け。

(3) 系の量子化は、 q, p を演算子 \hat{q}, \hat{p} に置き換えることでなされる。ただし、 \hat{q}, \hat{p} は正準交換関係

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (4)$$

を満たし、また、 \hbar はプランク定数を 2π で割ったものである。時間に依存しないシュレディンガー方程式

$$\hat{H}\Psi(q) = E\Psi(q) \quad (5)$$

を微分方程式として具体的に書き下せ。ここで、 $\Psi(q)$ は波動関数であり、 E はエネルギー固有値である。

(4) 波動関数 $\Psi(q)$ が $\Psi(q + 2\pi R) = \Psi(q)$ の周期性をもつとしてシュレディンガー方程式を解くと、その解は

$$\Psi_n = c_n \exp\left(in\frac{q}{R}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

で与えられる。ここで c_n は定数である。この Ψ_n をシュレディンガー方程式 (5) に代入することで、対応するエネルギー固有値 E_n を求めよ。さらに、波動関数の規格化条件

$$\int_0^{2\pi R} dq \Psi_n^* \Psi_n = 1 \quad (7)$$

から定数 c_n を決めよ。ここで、 Ψ_n^* は Ψ_n の複素共役であり、 c_n は実数であるとせよ。

【問2】

次に、ラグランジアンとして

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{\hbar}{2\pi R}\theta\dot{q} \quad (8)$$

を考える。ここで、 θ は実数値をとるパラメータである。

- (1) 【問1】と同様にして、オイラー・ラグランジュ方程式を導け。導いたオイラー・ラグランジュ方程式が、パラメータ θ に依存するかしないかを述べよ。
- (2) 【問1】と同様にして、正準運動量 p 、ハミルトニアン H を導け。さらに、量子化の規則を用いて、時間に依存しないシュレディンガー方程式を書き下せ。
- (3) 式(6)の Ψ_n が、 $\theta \neq 0$ においてもシュレディンガー方程式の解であることを示せ。また、そのとき、対応するエネルギー固有値 E_n を求めよ。
- (4) 問題(3)で求めた E_n のうち、 E_0 と E_1 を θ の関数として、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の領域で図示せよ。さらに、 $\theta = 0, \pi, 2\pi$ での E_0 と E_1 の大小関係を述べよ。
- (5) 以下では、ハミルトニアン \hat{H} の性質を議論する。
 - (5-1) 正準交換関係(4)を用いて、

$$e^{i\hat{q}/R}\hat{p}e^{-i\hat{q}/R} = \hat{p} - \frac{\hbar}{R} \quad (9)$$

を示せ。

- (5-2) ハミルトニアンはパラメータ θ に依存するので、これを以下では \hat{H}_θ と書く。このとき式(9)を用いて、 \hat{H}_θ と $\hat{H}_{\theta+2\pi}$ がユニタリー変換

$$\hat{H}_{\theta+2\pi} = e^{i\hat{q}/R}\hat{H}_\theta e^{-i\hat{q}/R} \quad (10)$$

で関係していることを示せ。

- (5-3) 式(10)から、 \hat{H}_θ のエネルギー固有値の集合と、 $\hat{H}_{\theta+2\pi}$ のエネルギー固有値の集合が等しいことを示せ。

第2問

十分大きい体積 V の箱の中の N 個の相互作用のない自由電子系について、以下の設問に答えよ。

【問1】 温度および化学ポテンシャルが T および μ のとき、エネルギー ϵ をもつ電子数密度は、

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/(k_B T)} + 1}$$

で与えられる。ここで、 k_B はボルツマン定数である。 $\mu \gg k_B T$ における $f(\epsilon)$ の概形を図示せよ。

【問2】 この系の1電子のハミルトニアンは、 m を電子の質量、 p_x, p_y, p_z をそれぞれ x, y, z 方向の運動量として、

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}$$

で与えられる。また、エネルギーが ϵ から $\epsilon + \Delta\epsilon$ の間にある1つの電子の状態数は、1粒子状態密度 $D(\epsilon)$ を用いて、 $D(\epsilon)\Delta\epsilon$ と表せる。ここで $\Delta\epsilon$ は微小量である。相互作用のない自由電子系では1粒子状態密度 $D(\epsilon)$ が

$$D(\epsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \epsilon^{\frac{1}{2}}$$

となることを示せ。ここでスピンの自由度は、 $D(\epsilon)$ に含めないものとする。また、 \hbar はプランク定数を 2π で割ったものである。

【問3】 全粒子数 N は、1粒子状態密度 $D(\epsilon)$ を用いて、

$$N = 2 \int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon) f(\epsilon)$$

と表される。ここで、右辺の2はスピンの自由度である。ゼロ温度のときの化学ポテンシャルは、フェルミエネルギー ϵ_F と呼ばれる。このフェルミエネルギー ϵ_F を $n = N/V$ の関数として求めよ。

【問4】 フェルミエネルギー ϵ_F をボルツマン定数 k_B で割った量 $T_F = \epsilon_F/k_B$ は、フェルミ温度と呼ばれる。電子数密度が $n = 1.8 \times 10^{29}/\text{m}^3$ であるアルミニウムのフェルミ温度 T_F を有効数字1桁で評価せよ。それぞれの定数の値は、 $k_B = 1.380649 \times 10^{-23} \text{J/K}$, $\hbar = 1.05457182 \times 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$, $m = 9.1093837 \times 10^{-31} \text{kg}$ とする。ここで、フェルミ温度を求めるにあたって、近似式 $(3\pi^2 \times 1.8 \times 10^{29})^{\frac{2}{3}} \simeq 3.1 \times 10^{20}$ を用いても良い。

【問5】 全粒子数 N は、化学ポテンシャルと温度の関数として表されるが、逆に全粒子数 N を固定し化学ポテンシャルを求めると、化学ポテンシャルは温度の関数となる。低温 $k_B T \ll \epsilon_F$ における化学ポテンシャルの温度に関する依存性を求めよ。計算にあたって、ゾンマーフェルト展開の公式

$$\int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) = \int_0^\mu d\epsilon D(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{d}{d\epsilon} D(\epsilon) \right|_{\epsilon=\mu} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^4\right)$$

を用いても良い。

【問6】 この系の低温 $k_B T \ll \epsilon_F$ における比熱

$$C = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$$

を考えたい。エネルギーは、ゾンマーフェルト展開の公式を用いると、

$$E \simeq 2 \int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) \epsilon = \frac{3}{5} N \epsilon_F + \frac{\pi^2}{4 \epsilon_F} (k_B T)^2 N$$

と評価される。この結果を用いて比熱を求めよ。

【問7】 問6で求めた比熱と単原子分子の理想気体の比熱 $3Nk_B/2$ を比較し、どのような違いがあり、どのような理由でその違いが生じているかを考察せよ。

第3問

粒子の質量を m 、座標を x 、速度（座標の時間微分）を \dot{x} と書く。 k を実定数として、ポテンシャル

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

のもとで粒子が1次元運動を行う。

【問1】

(1) 粒子の運動エネルギーを K とすると、ラグランジアン L は

$$L(x, \dot{x}) = K - U,$$

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

と書ける。ラグランジアンを求め、上の方程式が

$$m\ddot{x} = -kx$$

となることを示せ。

(2) 運動量を $p = \partial L / \partial \dot{x}$ として、ハミルトニアン H は

$$H(x, p) = p\dot{x} - L,$$

ハミルトンの運動方程式は

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

と書ける。ハミルトニアンとハミルトンの運動方程式を具体的に求めよ。

【問2】ある時刻 t における座標と運動量を $x(t)$ 、 $p(t)$ とする。 $t = 0$ における粒子の初期座標 $x(0)$ と初期運動量 $p(0)$ からの運動の時間発展は、ここで考えている運動の場合は、

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

と書くことができる。ただし、 M は時刻 t に依存する 2×2 の行列とする。

- (1) $k = 0$ のときの運動方程式の解 $x(t)$ 、 $p(t)$ を、 $x(0)$ 、 $p(0)$ を使って求め、上記の行列 M を使った形で書き表せ。また、その行列 M の行列式を計算せよ。
- (2) 同様に、 $k = m\omega^2 > 0$ の場合について、三角関数を使った行列の形で解を求め、その行列式を計算せよ。
- (3) 同様に、 $k = -m\omega^2 < 0$ の場合について、双曲線関数を使った行列の形で解を求め、その行列式を計算せよ。

【問3】加速器では、電荷をもった粒子を真空の筒の中に閉じ込めておくため、ところどころに電磁石を置き、粒子に対して線形の集束力もしくは発散力を与えている。加速器の中の粒子の運動は、【問2】で求めたような行列を実際の加速器の電磁石配置に従ってかけ合わせてゆくことで求まるが、そのような加速器全体を表す行列の行列式を、【問2】とは違う見方で考えてみたい。

(1) x, p の位相空間内に質量の同じ2つの粒子がある。座標と運動量をそれぞれ

$(x_1(t), p_1(t)), (x_2(t), p_2(t))$ と書く。このとき、

$$W(t) = x_2(t)p_1(t) - p_2(t)x_1(t)$$

が時間的に不変であること、すなわち

$$\dot{W}(t) = 0$$

であることを【問1】の(2)で求めた運動方程式を使って示せ。

(2) 同じことを行列を使って書く。 $(x_1(t), p_1(t)), (x_2(t), p_2(t))$ は、 $t = 0$ における初期座標と初期運動量 $(x_1(0), p_1(0)), (x_2(0), p_2(0))$ 及び時間発展を表す行列

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を使って、

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ p_1(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1(0) \\ p_1(0) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_2(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix}$$

と書ける。 $W(t)$ が時間的に不変であること

$$W(t) = x_2(t)p_1(t) - p_2(t)x_1(t) = x_2(0)p_1(0) - p_2(0)x_1(0)$$

を使って、行列 T の行列式を計算せよ。

第4問

- (1) z 方向に無限の長さをもつ半径 a [m] で内部は中空の円筒状導体を考える (図 1). この導体表面の z 方向に単位長さあたり $+\lambda$ [C/m] の電荷が一様に分布しているとして, 電場に関するガウスの法則を用いて導体内および導体外で生じる電場の強さ E [V/m] をそれぞれ求めよ. ここで導体内外の誘電率には, 真空の誘電率 ϵ_0 [F/m] を用いること.

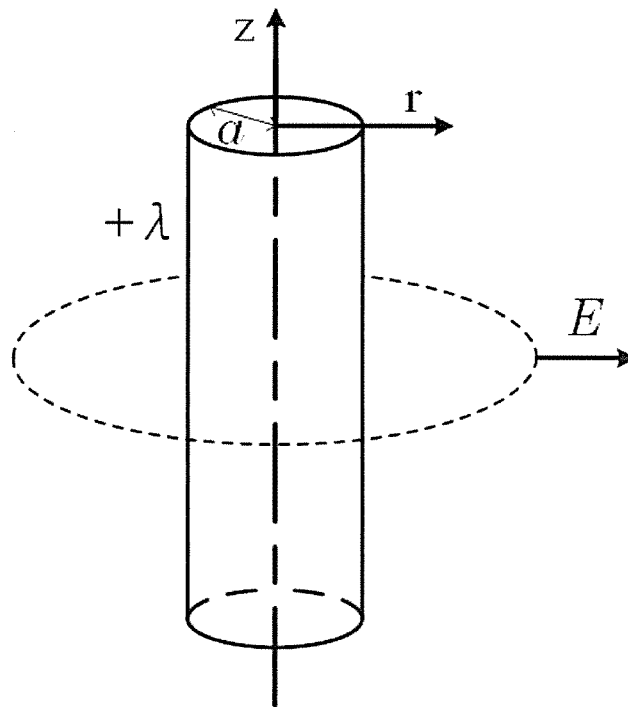


図 1: 半径 a [m] の円筒状導体.

電場に関するガウスの法則

閉曲面 S を貫く電束は閉曲面内部の電荷と等価であるという法則. 電束密度 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ [C/m²], 閉曲面内の電荷の合計 Q [C] との関係は, 以下のようなになる.

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

ここで $d\mathbf{S}$ は閉曲面の面要素である.

- (2) (1)と同じ形状の円筒状導体 A, B が間隔 d [m] 隔てて平行に置かれている。導体 A には z 方向の単位長さあたり $+\lambda$ [C/m], B には $-\lambda$ [C/m] の電荷が分布している (図 2)。 $d \gg a$ が成り立つ場合, 円筒状導体 A, B の表面上に一様に電荷が分布すると考えることができる。このときの円筒状導体 A-B 間の電位差 V_{AB} [V] を求めよ。導体間の誘電率には, 真空の誘電率 ϵ_0 [F/m] を用いること。

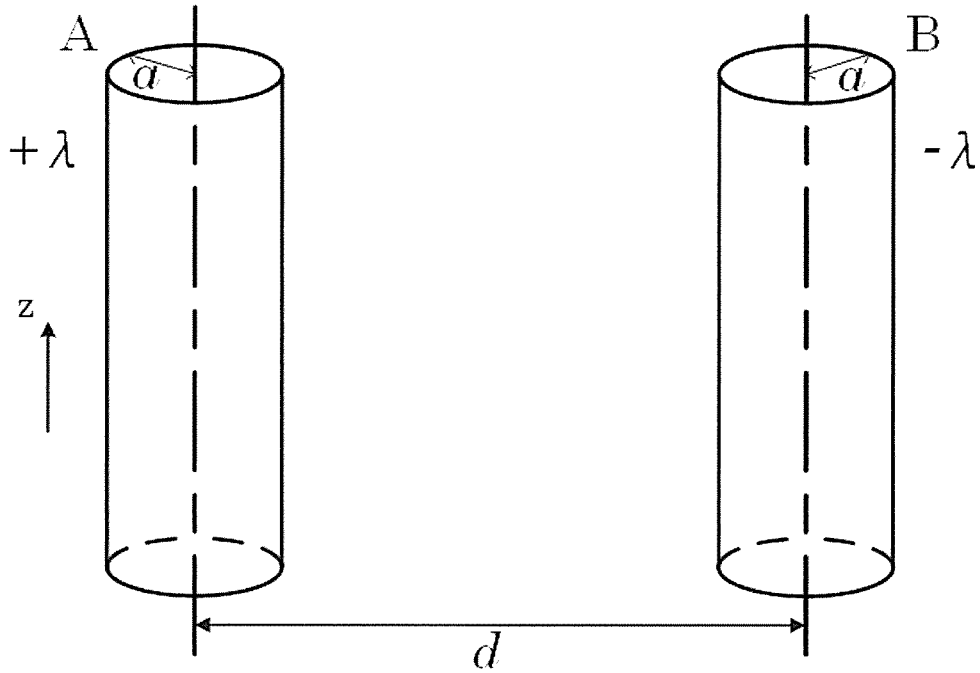


図 2: 円筒状導体 A, B による平行線路.

- (3) (2)の条件が成り立つときの円筒状導体 A-B 間の z 方向の単位長さあたりの静電容量 (キャパシタンス) C [F/m] を求めよ。

- (4) (2)と同じ形状の円筒状導体 A の表面に z 方向に電流 $+I$ [A], 導体 B の表面には逆向きの電流 $-I$ [A] が流れる平行往復導線路を考える. この平行往復導線路の断面図を図 3 に示す. $d \gg a$ が成り立つ場合, 円筒状導体 A, B の表面上に一様に電流が分布して流れると考えることができる. このときの図 3 の x 軸上の円筒状導体 A-B 間 ($a < x < d - a$) の磁場 H [A/m] の強さをアンペールの法則を用いて求めよ.

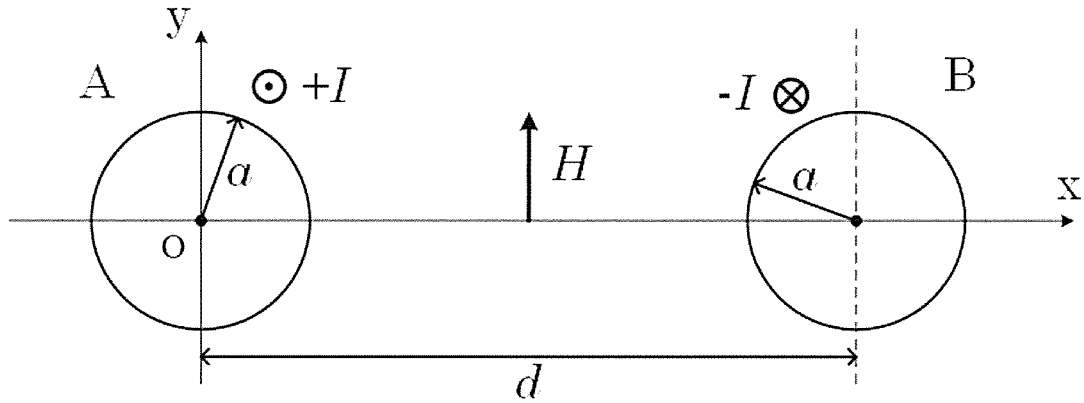


図 3: 円筒状導体 A, B による平行往復導線路の xy 平面断面図.

アンペールの法則

閉曲線 C を縁にもつ曲面 S において, 電流密度 J [A/m²], 磁場 H [A/m] は以下の関係式を満たす.

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

- (5) (4) の条件が成り立つときの円筒状導体 A, B による平行往復導線路について, 図 4 に示す長方形 $S[\text{m}^2]$ を貫く磁束 $\phi[\text{Wb}]$ を求めよ. 導体間の透磁率には, 真空の透磁率 $\mu_0[\text{H/m}]$ を用いること.

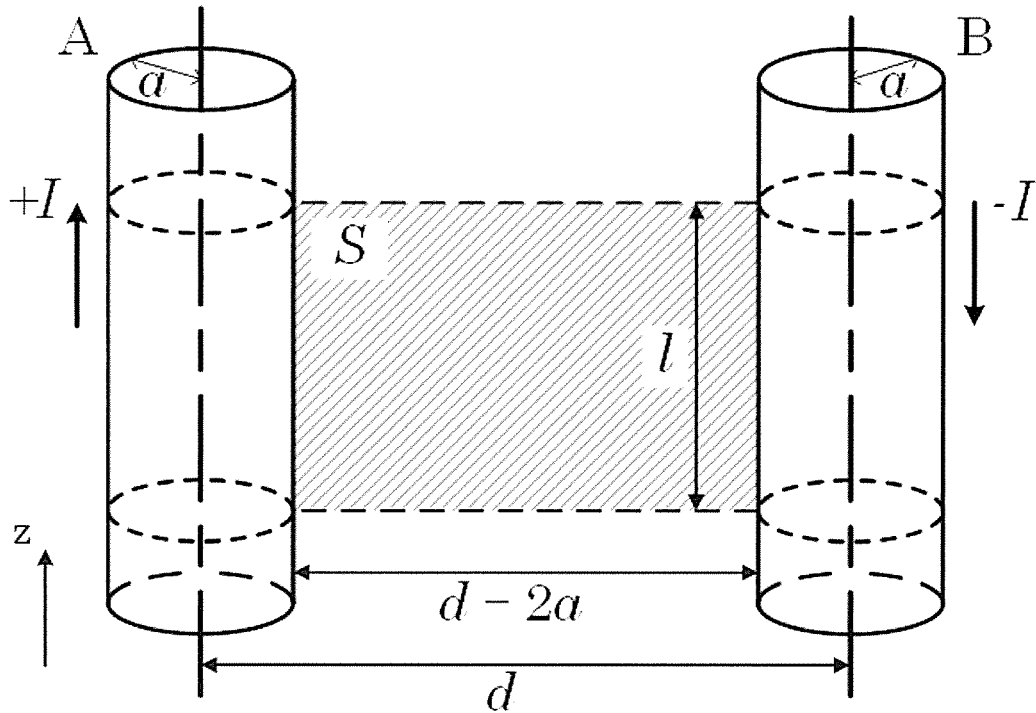


図 4: 円筒状導体 A, B による平行往復導線路と線路間の面積 S .

- (6) (5) で求めた磁束 $\phi[\text{Wb}]$ を用いて, $d \gg a$ が成り立つ円筒状導体 A, B による平行往復導線路の z 方向の単位長さあたりの自己インダクタンス $L[\text{H/m}]$ を求めよ.

第5問

【問1】

陽子陽子衝突実験について考えてみる。単位面積あたりの衝突密度である輝度は、ビームパラメータで記述される量である。簡単にビームの長さを無視し、両ビームとも陽子数 N_p 、ビームサイズ σ_p で、 f [Hz] の頻度で交差する（図1）と、輝度 \mathcal{L} は、

$$\mathcal{L} \propto \frac{N_p^2}{\sigma_p^2} \cdot f$$

で表される。

陽子陽子衝突で生成されるヒッグス粒子の生成数は、生成する確率 σ （断面積）、積分輝度 $\int \mathcal{L} dt$ を用いて、 $N = \sigma \cdot \int \mathcal{L} dt$ と記述する。断面積の単位は [b]（「バーン」と読む）であり、輝度の単位はその逆数 [1/b] である。

- (1) 同じ実験時間で、多くのヒッグス粒子を作るには、輝度をあげれば良い。輝度をあげるにはどのようにすれば良いか、思いっくだけ記述せよ。
- (2) ある重心系エネルギーの陽子陽子衝突における、ヒッグス粒子生成の断面積は、56 [pb]（pは 10^{-12} を表す接頭語）である。積分輝度 139 [1/fb]（fは 10^{-15} を表す接頭語）相当の陽子陽子衝突において、何個のヒッグス粒子が生成されたことになるか。

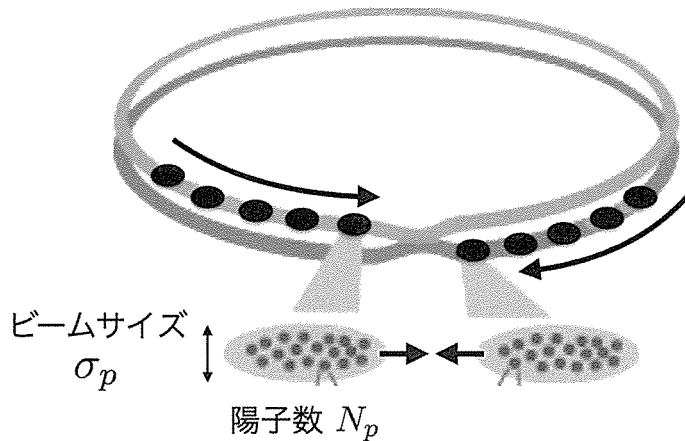


図1: 円形加速器による陽子陽子衝突の概略図。 N_p 個の陽子の塊を交差させ、陽子陽子衝突を起こす。

【問2】

ヒッグス粒子は生成直後に様々な粒子に崩壊するため、崩壊後の粒子を精度良く測定することが必要である。衝突点付近に設置される位置検出器について考えてみる。ほとんどの粒子は、厚み t の検出器を貫通し、荷電粒子の場合、検出部を通った距離に比例した電流が電極方向に流れ、電極に電荷が溜まる。電極を長さ d の単位に微細化しておくことで粒子の貫通位置がわかる。

荷電粒子が図2のように垂直入射した場合、一つの電極に電荷 Q_0 が溜まった。図3のように角度 θ を持って入射した場合、二つの電極にそれぞれ Q_1, Q_2 の電荷が溜まった。

- (1) Q_0 と (Q_1+Q_2) の関係を示せ。
- (2) Q_1 が溜まった電極の中心を $x = 0$ とした時、通過粒子の $t/2$ での位置 x は、電荷重心法を用いて、

$$x = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \cdot d [\mu\text{m}]$$

と記述できる。電荷の誤差を $\delta Q_1, \delta Q_2$ とした時に、誤差伝播公式

$$(\delta x)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial Q_1} \right)^2 (\delta Q_1)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial Q_2} \right)^2 (\delta Q_2)^2$$

を用いて位置の誤差 δx を記述せよ。

- (3) $\delta Q_1 = \delta Q_2$ としてまとめ、どのような条件が位置精度を良くするか述べよ。

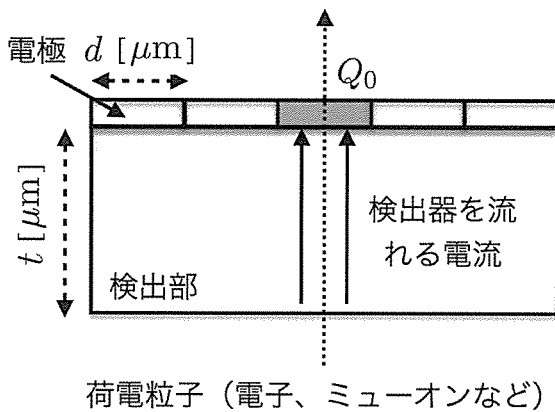


図2: 垂直入射の場合

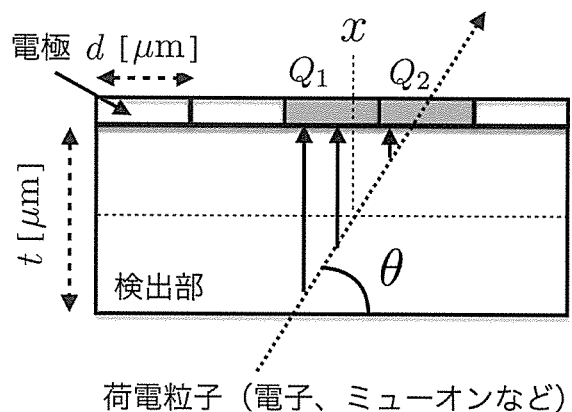


図3: 角度 θ を持った入射の場合

【問3】

位置検出器を層状に設置し、荷電粒子の通過位置を連続測定することで、粒子の飛跡を知ることができる（トラッキング）。最小二乗法を用いた簡単なトラッキングを行ってみる。磁場の影響は考えず、荷電粒子は直線上に進むものとする。

図4.5のように、 n 層の位置検出器があり、 y 方向の設置位置 $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n)$ は固定され、誤差はないものとする。各検出器での検出位置を $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)$ 、検出誤差は既知であり $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n)$ である時、以下の条件を考えてみる。

問の解答は、下記のA～Fのうち、必要なものを使って記述せよ。

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}, B = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}, C = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2}, D = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, E = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}, F = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}$$

(1) 図4のように一次元の直線の場合、通過位置 a を求めたい。

$$\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a)^2}{\sigma_i^2}$$

を最小とする a を求めよ。

(2) 図5のように二次元の直線の場合、切片 b 、傾き c を求めたい。

$$\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - c y_i - b)^2}{\sigma_i^2}$$

を最小とする b, c を求めよ。

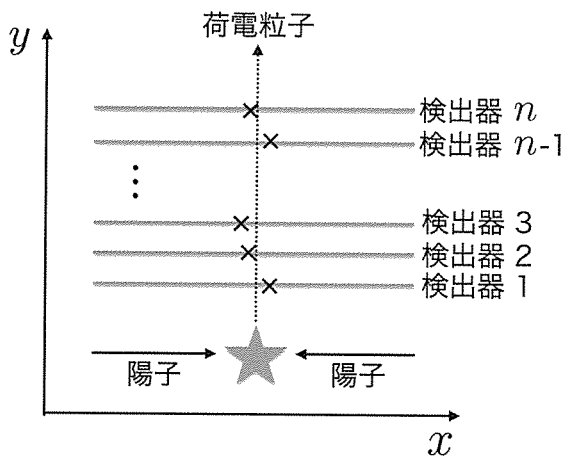


図4: 一次元トラッキング。×印が測定位置に対応。

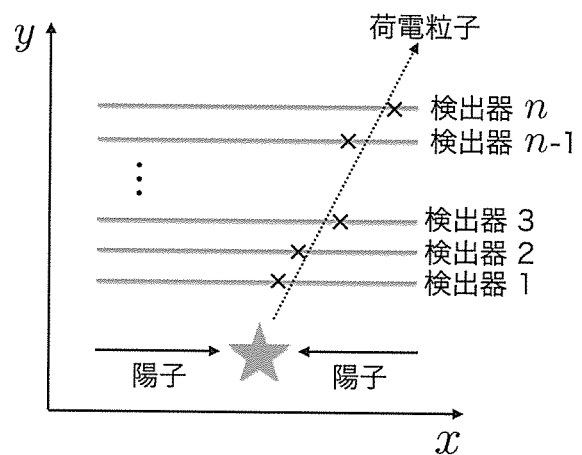


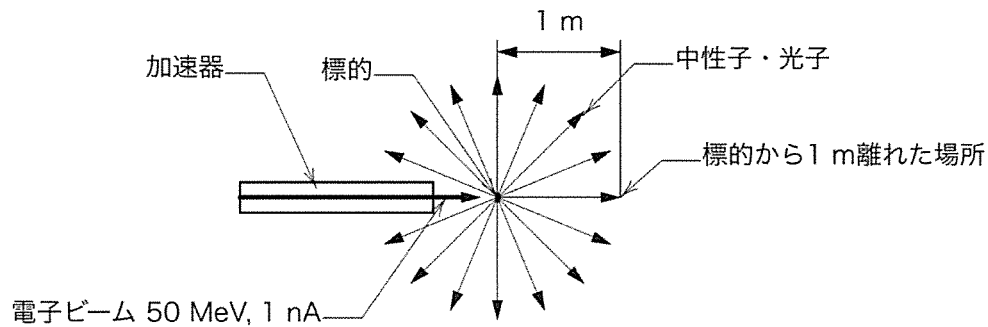
図5: 二次元トラッキング。×印が測定位置に対応。

第6問

【問1】

エネルギー 50 MeV(eV は電子を 1 ボルトの電位差で加速した際に得られる運動エネルギー, M は 10^6 を表す), 電流 1 nA(n は 10^{-9} を表す) の電子ビームを標的に入射する加速器の放射線遮蔽設計を行う. 以下の (1)~(5) の問いに答えよ. なお解答には以下の数字を用い, 有効数字は特に指定のない場合は 2 桁とすること.

電気素量: 1.6×10^{-19} C



- (1) エネルギー E_0 [MeV] の電子 1 個あたりの中性子の発生数 Y [個] は, 標的の材質をタングステンとすると以下の式で得られる.

$$Y = 3.0 \times 10^{-4} \cdot E_0$$

この式を用いてエネルギー 50 MeV, 電流 1 nA の電子ビームを標的に入射した場合の中性子の単位時間あたりの発生個数 [個/s] を求めよ.

- (2) この中性子による線量率 D_n [$\mu\text{Sv/h}$](Sv(シーベルト) は放射線の線量, Sv/h は 1 時間あたりの放射線の線量を表す. μ は 10^{-6} を表す) は単位時間・単位面積あたりの中性子数 ϕ [個/($\text{m}^2 \cdot \text{s}$)] と, 換算係数 $F = 1.0 \times 10^{-5}$ [$\frac{\mu\text{Sv/h}}{\text{個}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})}$] を用いて $D_n = F \cdot \phi$ で求めることができる.

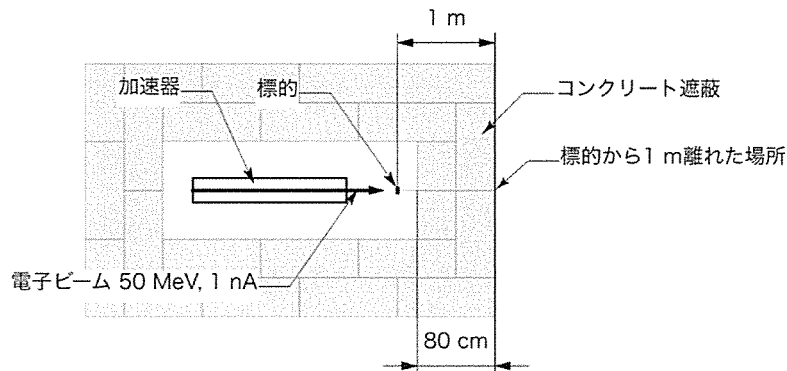
中性子は標的から実験室系で等方に放出されるとして, 標的を中心とした半径 1 m の球面を考え, その面上での ϕ を導出し F を乗じて, 標的から 1 m の位置での中性子線量率を求めよ.

- (3) 光子の線量率 D_g [$\mu\text{Sv/h}$] は, 電子の進行方向については, 電子のエネルギーを E_0 [MeV], 標的からの距離を d [m], 標的に入射する電子ビームのパワー P [W] として, 以下の式で求められるとする.

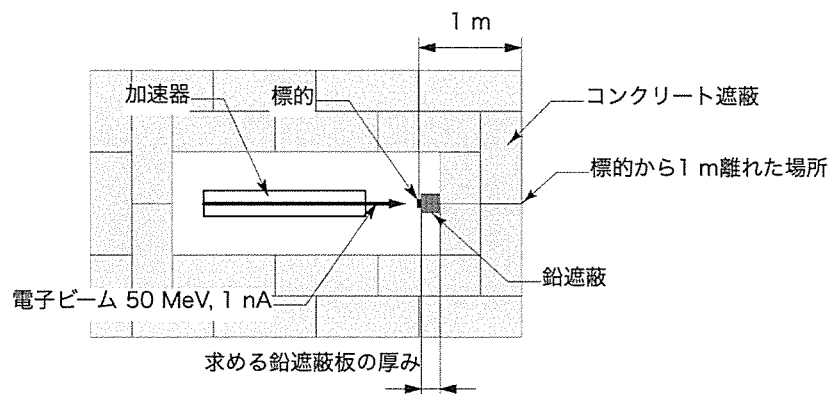
$$D_g = 3.0 \times 10^5 \cdot \frac{E_0}{d^2} \cdot P$$

電子ビームのパワーをエネルギーと電流から求め、この式を用いて標的から1 mの位置での光子の線量率を求めよ。

- (4) (2) で求めた中性子線量率 D_n [$\mu\text{Sv/h}$] を下げるために、標的とそこから1 mの位置の間に80 cm厚みのコンクリートを置く。このとき1 mの位置での中性子線量率を求めよ。なお、この中性子に対するコンクリートの1/10 価層（線量率を1/10にする厚み）は40 cmである。なお、中性子が吸収されて発生する光子の寄与は無視するものとする。



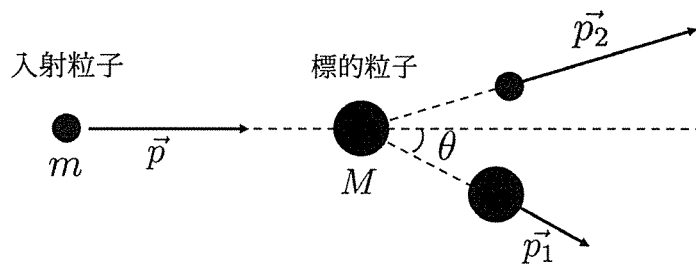
- (5) (3) で求めた光子線量率 D_g も (4) で置いたコンクリート80 cmにより減じられる。この光子に対するコンクリートの1/10 価層は40 cmである。この状態でも1 mの位置での光子線量率が大きいので、標的とコンクリートの間に2 cm厚みの鉛遮蔽板を設置し光子線量率を下げる。コンクリートと鉛遮蔽板を透過後の1 mの位置での光子線量率が、 $25 \mu\text{Sv/h}$ を超えないようにするためには、コンクリート80 cmにくわえ少なくとも何枚の鉛遮蔽板が必要か。この光子に対する鉛の半価層（線量率を1/2にする厚み）を2 cmとする。



【問2】

遮蔽設計の際に問題となる数 MeV の中性子の運動エネルギーを決めるためには、中性子の弾性散乱後の散乱粒子を測定する方法と、中性子の飛行時間を測定する方法がある。以下の (1)~(4) の問いに答えよ。有効数字は特に指定のない場合は2桁とする。相対論効果は考慮しなくてよい。

- (1) 中性子が標的粒子と弾性散乱を起こしたとき、標的粒子の反跳角 θ に対する標的粒子が得る運動エネルギーを考える。中性子の質量を m 、散乱前後の運動量をそれぞれ \vec{p} 、 \vec{p}_2 とおく。このとき入射中性子の運動エネルギーは \vec{p} と質量を m を用いて $|\vec{p}|^2/(2m)$ と書ける。標的粒子の質量を M とする。標的粒子は散乱前は静止しており、散乱後は運動量 \vec{p}_1 を得たとする。この散乱の前後に対する運動エネルギー保存の式（ベクトルの絶対値を用いた始状態と終状態の恒等式でよい）を m 、 M 、 \vec{p} 、 \vec{p}_1 、 \vec{p}_2 を用いて記述せよ。



- (2) (1) で求めた関係式と運動量保存の式、 $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ 、の2つの式から中性子の散乱後の運動量 \vec{p}_2 を消去し、散乱後の標的粒子の運動エネルギー $T_1 = |\vec{p}_1|^2/(2M)$ を、 m 、 M 、 θ と $T = |\vec{p}|^2/(2m)$ を用いて表せ。 $\vec{p} \cdot \vec{p}_1 = |\vec{p}| \cdot |\vec{p}_1| \cos \theta$ を用いること。標的粒子が陽子とし $m = M$ であるとする。散乱前の中性子の運動エネルギーの半分の運動エネルギーを得るための θ は何度か。
- (3) 中性子の飛行時間を測定し、運動エネルギーを導出する方法を考える。中性子の質量 m に光速 $c = 3 \times 10^8$ m/s の自乗を乗じたものを $mc^2 = 940$ MeV とし、飛行距離 L [m]、飛行時間 t [ns] (n は 10^{-9} を表す)、中性子の運動エネルギー E [MeV] の関係式を書き下し、1 m の飛行距離に対する、1 MeV と 9 MeV の中性子の飛行時間をそれぞれ有効数字1桁で求めよ。
- (4) 以上を踏まえて数 MeV の中性子の運動エネルギーを測定するためのそれぞれの方法について、運動エネルギーの決定精度を決めるパラメータはなにかを述べよ。