総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科
５年一貫制博士課程入学試験問題
数　学

令和４年１０月２５日（火）９時３０分～１１時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること.

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること.

☆ 試験問題（４問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること.

☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第○○問□□枚目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること.

解答できない場合も，受験番号，氏名，問題番号を記入し，提出すること.

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に知らせること.

第１問

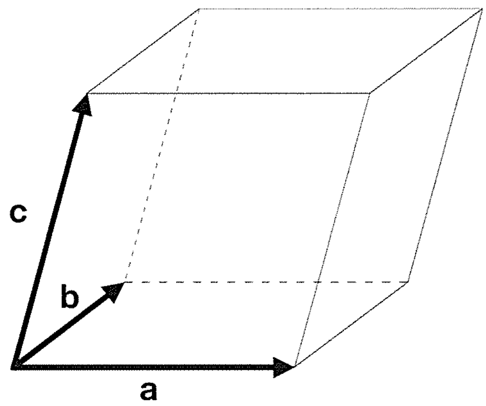

図 1: 平行六面体

図 1 に示す 3 次元ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ が構成する平行六面体を考える.

【問１】

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が構成する平行四辺形の面積 S は以下のように書けることを示せ.

$$S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

ただし × は外積である.

【問２】

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ が構成する平行六面体の体積を内積 (·) および外積 (×) を用いて書き, その導出を説明せよ.

【問３】

行列式が【問２】で求めた平行六面体の体積を与える行列 M を考える．３つのベクトルの成分 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ を用いて行列 M を具体的に書け.

第２問

$\mathbf{x}$ を 3 次元の空間座標としたとき,

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}) = -\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

を満たす $G(\mathbf{x})$ を以下計算する.

【問１】

以下で与える

$$G(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2} \tag{2}$$

は, (1) の解であることを示せ.

【問２】

以下を示せ.

$$\int_0^\infty dz \frac{\sin z}{z} = \frac{\pi}{2}\,. \tag{3}$$

ヒント

微小パラメータ ε を用いて図 2 のように z を複素平面に拡張し, コーシーの積分定理を用いることで, 扱いやすい積分に書き換えることができる.

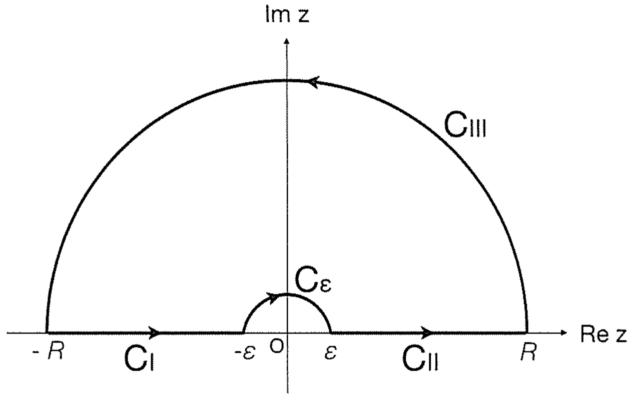

図 2: 複素平面上の経路

【問３】

(3) を用いて, (2) で与える $G(\mathbf{x})$ の解を $\mathbf{x}$ の関数として具体的に求めよ.

【問４】

【問１】-【問３】では空間的無限遠（$|\mathbf{x}| \to \infty$）で 0 に収束することを要請し (1) の解を求めた. 無限遠での挙動を制約しないとき, (1) の一般解を求めよ.

第３問

以下の二階微分方程式を考える.

$$(1-x^2)\frac{d^2 f(x)}{d^2 x} - 2x\frac{df(x)}{dx} + 2f(x) = 0\,. \tag{4}$$

ただし x は $-1 < x < 1$ とする.

【問１】
方程式（4）の２つの解 f_1, f_2 を用いて, 以下

$$W(x) \equiv f_1(x)\frac{df_2(x)}{dx} - f_2(x)\frac{df_1(x)}{dx} \tag{5}$$

のようにロンスキアン $W(x)$ を定義する.

(a) $W(x)$ は以下を満たすことを示せ.

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{2x}{1-x^2}W(x)\,.$$

(b) 上式を解いて $W(x)$ の解を求めよ.

【問 2】
方程式（4）には $d^2 f/dx^2 = 0$ を満たす解が存在する. この解を $f_1(x)$ としこれを求めよ. ただし積分定数は $f_1(1) = 1$ となるように定めよ.

【問 3】
【問１】(b) で求めた $W(x)$ および【問２】で求めた $f_1(x)$ を用いて, $f_2(x)$ が満たす一階微分方程式を求めよ.

【問 4】
【問３】で得られた方程式を解いて, 方程式 (4) の一般解を求めよ.

第４問

【問１】

任意のユニタリー行列 U の行列式 $\det U$ の絶対値は 1 であることを示せ.

【問２】

任意のユニタリー行列の固有値の絶対値は 1 であることを示せ.

【問３】

2×2 の複素行列を

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と書く. U がユニタリー行列となる場合に, 複素数 a および b と $\det U = e^{i\varphi}$ で与えられる実数 φ を用いて, c および d をそれぞれ書き下せ. また複素数 a と b が満たすべき関係式を書け.

【問４】

以下の 2×2 のユニタリー行列

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

の２つの固有値 λ を計算せよ．ただし λ は $\lambda = \mathrm{Re}\lambda + i\,\mathrm{Im}\lambda$ のように実部, 虚部それぞれを明示すること.