総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

５年一貫制博士課程入学試験問題

専門科目

令和３年８月１８日（水）１３時００分～１６時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること．

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること．

☆ ６問の中から，４問を選んで解答せよ．

ただし、素粒子原子核専攻理論部門を志望する（志望順位を問わず）受験者は第１問及び第２問を必ず選択しなければならない．

☆ 試験問題（４問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること．

☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第○○問□□枚目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること．解答できない場合も，受験番号，氏名，問題番号を記入し，提出すること．

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に知らせること．

問題は次頁

第1問

質量 m の粒子の1次元の運動を量子力学的に考える．座標 x の領域 $0 \leq x \leq L$ において x の正方向に一様電場 $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E} > 0$) をかけた場合の，正の電荷 q の粒子の運動を考える．このとき，粒子の運動のハミルトニアン演算子は以下のように与えられる．

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x),$$

ただし，$\hbar$ は換算プランク定数，ポテンシャル $V(x)$ は

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -q\mathcal{E}x, & 0 \leq x \leq L, \\ -q\mathcal{E}L, & x > L, \end{cases}$$

である．

【問1】
質量 m, 電荷 q, 電場 $\mathcal{E}$, 長さ L のうち必要なものを用いて，$\hbar$ と同じ単位で表される量を作れ．

【問2】
時刻 t における粒子の状態が規格化可能な波動関数 $\Psi(x,t)$ で与えられるとする．運動量演算子を $\hat{p}$ とすると，時刻 t における運動量の期待値 $\langle \hat{p} \rangle$ を用いて与えられる以下の量,

$$\frac{1}{m}\frac{d\langle \hat{p} \rangle}{dt}$$

は，粒子がその時刻に $0 \leq x \leq L$ の領域に存在する確率と，この領域の古典力学における加速度の積で与えられることを示せ．

【問3】
時刻 t の依存性が，E を正の実定数として次のように与えられる波動関数を考える．

$$\Psi_E(x,t) = e^{iS(x)/\hbar}e^{-iEt/\hbar}.$$

このとき，$0 \leq x \leq L$ の領域で関数 $S(x)$ の満たす微分方程式を導け．

【問４】
【問３】で導いた微分方程式を $\hbar$ を小さいとして近似的に解くことを考える．$S(x)$ を

$$S(x) = S_0(x) + \hbar S_1(x) + O(\hbar^2),$$

と $\hbar$ のベキで展開し，$S_0(x)$ と $S_1(x)$ を定義する．このとき，$0 \leq x \leq L$ の領域において，$S_0(x)$ と $S_1(x)$ が次の２つの微分方程式を満たすことを示せ．

$$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_0(x)}{dx}\right)^2 - q\mathcal{E}x,$$

$$0 = \frac{dS_0(x)}{dx}\frac{dS_1(x)}{dx} - \frac{i}{2}\frac{d^2S_0(x)}{dx^2}.$$

【問５】
【問４】の２つの微分方程式を解き，$S_0(x)$ と $S_1(x)$ を求めることによって，時間によらない波動関数 $\psi(x) = e^{iS(x)/\hbar}$ の近似解を求めよ．ただし，初期条件と規格化条件に依存する未知定数は残したままでよい．

【問６】
【問５】で求めた時間によらない波動関数 $\psi(x)$ を用いて，粒子の運動について考える．ここで粒子は，ある E の狭い領域で,【問３】の $\Psi_E(x,t)$ を適当な重みで重ね合わせることによって得られる規格化可能な波束 $\Phi(x,t)$ で与えられる状態で表され，位置とエネルギーの両方に小さな不確定性をもつ．粒子を $x < 0$ の領域から $0 \leq x \leq L$ の領域に入射すると，波束の絶対値 $|\Phi(x,t)|$ は時刻 t とともに変化する．そこで，$|\Phi(x,t)|$ のピーク位置の速度，およびピーク幅（波束の広がり）が時間とともにどのように変化するか定性的に述べよ．ただし，粒子の反射は無視してよい．

第2問

【問1】

N 個の独立なスピン 1/2 の原子からなる結晶を考え，この系を一様な定磁場 H の中に置く．i 番目の原子は磁場方向のスピン $\hbar\sigma_i/2$ $(\sigma_i = \pm 1)$ によって決まる磁気モーメント $\mu\sigma_i$ をもち，系全体のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^{N} \mu\sigma_i H \tag{1}$$

で与えられる．ここで $\hbar$ は換算プランク定数，μ はボーア磁子と呼ばれる正の物理量である．この系がカノニカル分布に従うとして，以下の問いに答えよ．ただし，系の温度と体積をそれぞれ T, V と書き，ボルツマン定数を k と書く．なお、原子の数 N は十分に大きいとし，また、格子振動の効果は無視できるとする．

(1) この系の分配関数，ヘルムホルツの自由エネルギー，エントロピー，内部エネルギーを求めよ．

(2) この系の磁化が $M = n\mu \tanh(\beta\mu H)$ で与えられることを示せ．ただし，$n = N/V$ は数密度，$\beta = 1/(kT)$ は逆温度を表す．

次に，相互作用によって，臨界温度 T_c 以下の温度で，外部磁場がゼロのときに，この系は単位体積当たりの自発磁化 M_0 をもつとする．各原子は自発磁化に比例する磁場 aM_0 を感じる．ただし，a は正の比例係数である．次の問いに答えよ．

(3) 自発磁化は $M_0 = n\mu \tanh(\beta\mu a M_0)$ という式を満たす．この式を解いて，M_0 が $\sqrt{(T_c - T)/T_c}$ に比例することを示せ．ただし，臨界温度は $T_c = n\mu^2 a/k$ である．また，温度が T_c に十分近いとして $T^m(T_c - T) \simeq T_c^m(T_c - T)$ (m は定数) と近似し，M_0 が小さいとして $\tanh(x)$ を $x - x^3/3$ と近似してよい．

【問２】

箱の中の自由電子を考える．以下の問いに答えよ．

(1) まず，１個の電子について考える．箱の一辺の長さが L のとき，運動量の x 成分は $p_x = (2\pi\hbar/L)n_x$ と量子化される．ここで n_x は整数であり，y，z 方向についても同様に量子化される．電子の質量を m とし，エネルギーは $\epsilon = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$ で与えられる．エネルギーが ϵ から $\epsilon + d\epsilon$ までの状態数 $D(\epsilon)d\epsilon$ を考え，状態密度が

$$D(\epsilon) = \frac{m^{3/2}V}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\epsilon^{1/2}$$

で与えられることを示せ．ただし，箱の体積 $V = L^3$ は十分に大きいとし，また，この式ではスピン自由度を無視している．

(2) 次に，スピン自由度も考える．一様な定磁場 H をかけると，磁場方向のスピン $\hbar\sigma/2$ $(\sigma = \pm 1)$ に応じて，電子のエネルギーは $\epsilon = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m - \mu\sigma H$ と変化する．スピンが上向き $(\sigma = +1)$ の電子の状態密度 $D_+(\epsilon)$ と下向き $(\sigma = -1)$ の電子の状態密度 $D_-(\epsilon)$ をそれぞれ求めよ．

(3) さらに，N 個の自由電子からなる系を考え，この系に一様な定磁場 H をかける．絶対温度ゼロでは，スピンが上向きな電子の数 N_+ は (２) で求めた状態密度を最低エネルギーからフェルミエネルギー ϵ_F まで積分して得られる．スピンが下向きの電子数 $N_- = N - N_+$ についても同様である．電子１つあたりの磁気モーメントが $\mu\sigma$ で与えられるとして，この系の磁化 M を求めよ．特に $\epsilon_F \gg \mu H$ のとき，M が H に比例し係数が正であること，即ち，この系が常磁性をもつことを示せ．

第3問

一様な重力下にある質量 m の質点に関する非相対論的な運動を考える．以下，重力加速度を g とする．

【問1】

質点は鉛直面内の曲線に拘束されており，摩擦はないものとする．重力は z 軸の負の方向を向いている．曲線形状は，接線が x 軸となす角 θ を用いて

$$x = a(2\theta + \sin 2\theta), \qquad z = a(1 - \cos 2\theta) \qquad (-\pi/2 < \theta < \pi/2)$$

で与えられる (図1のサイクロイド曲線)．ここで，原点は $\theta = 0$ に対応する．曲線の端点 P_1 及び P_2 は，それぞれ，$\theta = -\pi/2$ 及び $\theta = +\pi/2$ に対応し，その高さは $2a$ で与えられる $(a > 0)$．

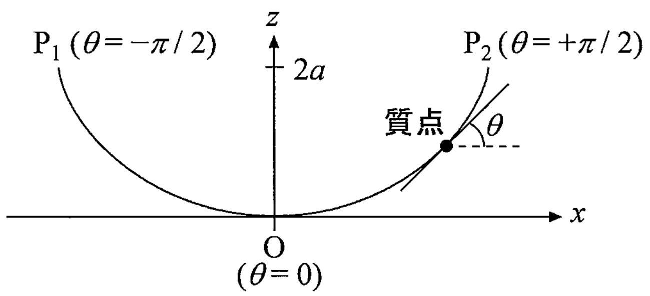


図 1: サイクロイド曲線.

(1) 運動エネルギー K を $\dot{\theta}$ と $\cos\theta$ を用いて表せ．以下，時間微分を文字の上のドットを用いて $\dot{\theta}$ のように表すこととする．

(2) ポテンシャルエネルギー U を $\sin\theta$ を用いて表せ．ただし，$z = 0$ で $U = 0$ とする．

(3) 曲線に沿う座標 s を導入する．$|s|$ は原点からの曲線に沿った距離に対応し，$\theta > 0$ で $s > 0$，$\theta < 0$ では $s < 0$ である．

$$s = \int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

を計算し，s を $\sin\theta$ を用いて表せ．

(4) ラグランジアンは $L = K - U$ で与えられる．K と U を $\dot{s}$ と s を用いて表し，ラグランジアンが

$$L(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \frac{mg}{8a}s^2$$

で与えられることを示せ．

(5) 一般座標 q に対する運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

で与えられる．上で求めた $L(s, \dot{s})$ から運動方程式を求めよ．

(6) 運動方程式を解くと, 質点は一般に $s=0$ を中心に振動することがわかる. 振動の周期 T を求めよ.

(7) サイクロイド曲線の端点 P_1 と P_2 の間の直線距離を 1.54 km とする. 質点を P_1 点にそっと置いたところ, サイクロイド曲線に沿う運動を始めた. P_2 点に達するまでの時間を計算せよ. ただし, $g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$ 及び $\pi=3.14$ とする. また, $9.81\pi/2=15.4$ を用いて良い.

【問 2】

図 1 のサイクロイド曲線を z 軸周りに回転することで得られる回転曲面 (図 2) を考える. 原点と曲面上の点を曲面に沿って最短距離で結ぶ曲線を C とする. C の長さは問 1 で求めた s で与えられる. C の xy 平面への射影が x 軸との間になす角を ϕ とすると, 質点の位置は一般座標 s 及び ϕ で決まる. ここで, 質点は原点を通過しない場合を考え, $s>0$ であり $0\le\phi<2\pi$ とする. 以下, s が a に比べて十分小さい場合を考え, s/a の 2 次以上の項は 1 と比べて十分小さく無視できるものとする.

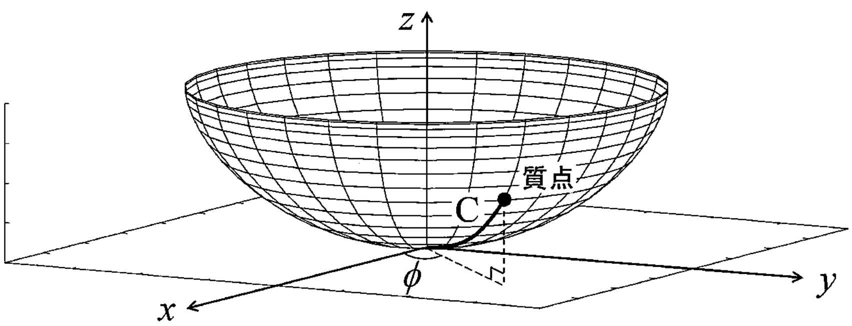


図 2: サイクロイド曲線を z 軸周りに回転することで得られる回転曲面.

(1) 運動エネルギー K, ポテンシャルエネルギー U, ラグランジアン $L=K-U$ を s, $\dot{s}$, $\dot{\phi}$ を用いて書き下せ.

(2) 一般座標 ϕ に共役な運動量 $\ell=\partial L/\partial\dot{\phi}$ を書き下せ. また, ℓ が保存量であることを示せ.

(3) エネルギー $E=K+U$ を書き下せ. ただし ℓ を用いて $\dot{\phi}$ を消去しておくこと. また, E が保存量であることを示せ.

有効ポテンシャル $U_{\mathrm{eff}}=U+\ell^2/(2ms^2)$ を導入すると, 質点の運動は $U_{\mathrm{eff}}(s)\le E$ を満たす s 上の 1 次元運動とみなせる. 次の具体例を考えよう.

(4) $s=s_0$ に置いた質点を, 時刻 $t=0$ に ϕ 方向に速さ v_0 で射出した. この場合の ℓ 及び E を求めよ.

(5) 射出後, 質点は $s=s_0$ の円運動を始めた. v_0 を求めよ.

第 4 問

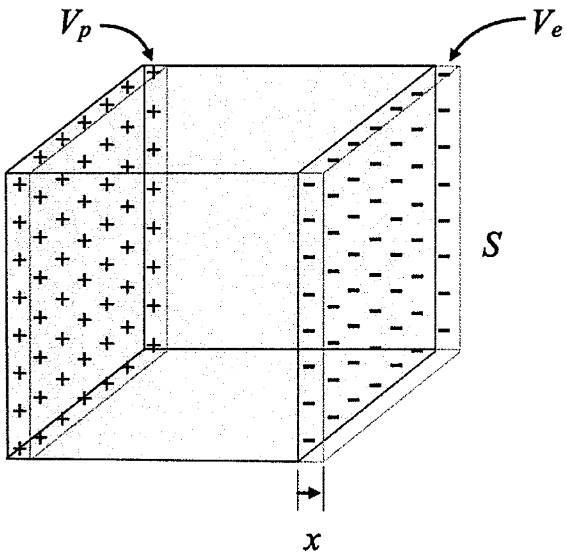
完全電離したプラズマは陽イオンと電子から構成され，電気的に中性な物質である．このプラズマ内を伝搬する電磁波について考える．ただし，陽イオンは静止し，一様の密度で分布しているものとする．また，プラズマの熱運動は無視する．解答は MKSA 単位系を用いること．電子の速さは光速より十分小さく，相対論的な取り扱いは行わない．

【問 1】

プラズマの電子群に摂動を与えると電子群が振動を始める．この振動をプラズマ振動とよぶ．

(1) 次の文章を読み，空欄に入る適切な式を解答せよ．

プラズマ中の微小領域を考え，この領域内の電子（陽イオン）密度を n_0 とする．この領域で電子が一斉に一方向に振動する場合を考える．電子分布が x ずれたとき，電子のみ存在する領域 V_e と陽イオンのみ存在する領域 V_p が生じる（図）．この状態は平行平板コンデンサとみなすことができる．電気素量を e，領域の側面面積を S とすると V_e に存在する電荷量は（ ① ）である．このとき，電子分布のずれによって生じる電場 E は x の関数となり，（ ② ）と表せる．ただし，誘電率は ε_0 とする．



(2) 電子の速度，質量をそれぞれ $\boldsymbol{v}$，m_e で表す．電場 $\boldsymbol{E}$ の中にある電子の運動方程式を示せ．

(3) (1)で求めた電場を用いて x 方向の振動方程式を立て，角振動数 ω_p（プラズマ振動数）を求めよ．

【問 2】

(1) プラズマ中のマクスウェル方程式，及び，電子の速度と電流密度の関係は次式で与えられるものとする．

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \qquad \boldsymbol{J} = -e n_0 \boldsymbol{v}$$

ここで $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{J}$ はそれぞれ磁束密度，磁場，電束密度，電流密度を表す．電場 $\boldsymbol{E}$ に関する次の波動方程式を導け．

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \left(\omega_p^2 \boldsymbol{E} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \right) = 0$$

(2) 伝搬する電磁波が z 方向への平面波であるとき，(1) の波動方程式を解き，この電磁波の角振動数 ω を波数 k とプラズマ振動数 ω_p の関数として表せ．

(3) 電磁波の位相速度 v_p（＝角振動数/波数）と屈折率 m（＝光速/位相速度）を ω と ω_p を用いて表せ．

(4) 真空中からプラズマへ電磁波が垂直に入射するとき，プラズマとの境界面で電磁波が反射される場合，その反射率 R（次式）を ω と ω_p の関数として表せ．

$$R = \left| \frac{1-m}{1+m} \right|^2$$

次に R と ω との関係を図示し，プラズマ振動数より低い角振動数の電磁波はプラズマ内を伝搬できないことを説明せよ．

以上

第5問

加速器で作ったニュートリノを物質と反応させて検出することを考える.

【問1】

素粒子の1つであるニュートリノ ν は，荷電パイ中間子 π^+ のミューオン μ^+ とニュートリノへの崩壊

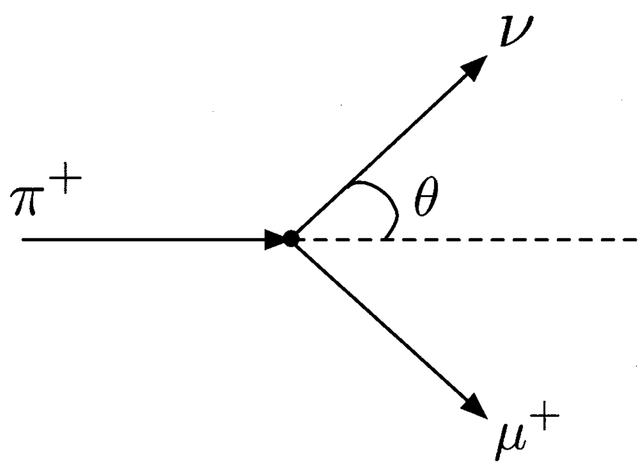
$$\pi^+ \to \mu^+\nu \tag{1}$$

から作り出すことができる (図). 荷電パイ中間子が崩壊してできるニュートリノのエネルギー E_ν は,

$$E_\nu = \frac{m_\pi^2 c^4 - m_\mu^2 c^4}{2(E_\pi - cp_\pi \cos\theta)} \tag{2}$$

で表すことができる. ここで，c は真空中の光速，m_π は荷電パイ中間子の静止質量，m_μ はミューオンの静止質量，E_π と p_π はそれぞれ荷電パイ中間子のエネルギーと運動量の大きさである. また θ は，荷電パイ中間子の運動する方向とニュートリノが飛び出す方向の間の角度である.

式 (2) から，ニュートリノがもつ最大エネルギーと最小エネルギーを c，m_π，m_μ，E_π，p_π を用いて表せ.



図：荷電パイ中間子がミューオンとニュートリノへ崩壊.

【問 2】

ニュートリノは，ニュートリノと物質との反応によって生成した荷電粒子を捉えることで検出される．ニュートリノの入射フラックスを ϕ [/cm^2/秒]，1 つの核子あたりのニュートリノ反応断面積を σ [cm^2]，検出器内の核子の総数を N_{nucleon} とすると，反応数は $\phi \times \sigma \times N_{\mathrm{nucleon}}$ [個/秒] となる．ただし，ニュートリノが検出器全体に一様に入射していることを想定する．

$\phi = 5.0 \times 10^5$ [/cm^2/秒]，$\sigma = 6.0 \times 10^{-39}$ [cm^2] のとき，水 5.0×10^2 kg の検出器の中で起こるニュートリノ反応を検出したい．用意した検出器は，起こった反応数のうち実際に信号として検出できる割合 (検出効率) が 0.90 であった．このとき，1.0×10^5 秒の間に検出する数を有効数字 2 桁で求めよ．なお，水 1kg あたりの核子数を 6.0×10^{26} とする．

【問 3】

問 2 で考えた検出器でニュートリノ反応を N 事象検出したとき，その統計精度は

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \tag{3}$$

で表すことができる．水 500 kg の検出器で実験した結果，10 %の統計精度で測定できた．検出器を改良することで同じ実験期間でも良い統計精度で測定することを考える．5 %の統計精度でニュートリノ反応数を検出したい場合，何 kg の水が必要になるか求めよ．

【問 4】

荷電粒子が物質中の光速 c/n より速い速度で通過するときに，微弱な光 (チェレンコフ光) が粒子進行方向の前方に放出される (c は真空中の光速，n は物質の屈折率である)．チェレンコフ光が放出される速度の下限値に対応するエネルギー E_{th} を荷電粒子の静止質量 m を用いて表すと，

$$E_{th} = \frac{nmc^2}{\sqrt{n^2 - 1}} \tag{4}$$

となる．運動量 140 MeV/c を持つ荷電パイ中間子が水の中を通過するときを考える．このときに，チェレンコフ光は発生しないことを式 (4) を用いて説明せよ．水の屈折率は 1.33，荷電パイ中間子の静止質量は 140 MeV/c^2 とする．エネルギー E，運動量 p，静止質量 m の間には，$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ という関係がある．

【問 5】

水の中を荷電粒子が通過するときのチェレンコフ光の光子の数 N_p を考える．素電荷を持つ荷電粒子が屈折率 n の物質を速度 v で微小な飛行長さ dx を通過したときに放出する光子数は，波長 λ と微小な波長領域 $d\lambda$ の間にある量として，次の式を用いて導くことができる．

$$\frac{d^2N_p}{d\lambda dx} = \frac{2\pi\alpha}{\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right) \tag{5}$$

ここで α は微細構造定数，また $\beta = v/c$，c は真空中の光速である．

β がほぼ 1 の荷電粒子が 3 cm の長さを飛行する間に放出するチェレンコフ光を，波長 300 nm から 600 nm まで感度がある光検出器で捉えることを考える．式 (5) から，この波長領域内に放出される光子数を求めよ．ここで簡単のために，3cm の間に β は変化しないとする．また，水の場合は $2\pi\alpha(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}) = 0.02$ となる．

問題は次頁

第6問

加速した電子ビームを標的に衝突させ, 標的から出てくるX線やイオン, 陽電子などの2次粒子を利用する装置は様々な場面で使われている. 以下では図1に示す様に, 電荷 $|Q|$ [C] をもった電子の塊が N [Hz] の繰り返しで標的に衝突する状況を考える. また簡単のため相対論的効果は考えなくてよいものとする.

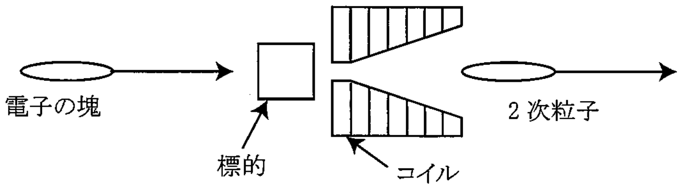


図1: 電子ビームを標的に衝突させ2次粒子を利用する装置の断面図.

【問1】

電子を1Vの電圧で加速したとき, 電子のもつエネルギーは1eVと表される. 電気素量 e を 1.6×10^{-19} C とした場合, $1\,\mathrm{eV} = 1.6 \times 10^{-19}$ J となる. 電子のもっていたエネルギー E_0[eV] は全て標的上で熱に変換されるとして以下の問に答えよ.

(1) $E_0 = 3.0 \times 10^9\,\mathrm{eV}$, $Q = 1.0 \times 10^{-8}\,\mathrm{C}$, $N = 50\,\mathrm{Hz}$ のとき, 電子ビームの平均電流 I_0[A], ビームパワー P_0[W] をそれぞれ有効数字2桁で求めよ.

(2) 標的を冷却水で冷却することを考える. 電子ビームのパワーが P_1[W] のとき, 標的を冷却する前の冷却水の水温が T_1 [°C], 冷却した後の水温が T_2 [°C] であった. 冷却水の流量 F [L/min] を P_1, T_1, T_2 を用いて表わせ. ただし 1 cal = 4.2 J とする.

(3) $P_1 = 1500\,\mathrm{W}$, $T_1 = 30\,^\circ\mathrm{C}$, $T_2 = 35\,^\circ\mathrm{C}$ の場合, 冷却水の流量を有効数字2桁で求めよ.

【問2】

標的から出てくる2次粒子は多くの場合, 大きな角度広がりをもって出てくる. これを利用しやすい平行ビームに近づけるために, 図1中に示されているような, 内径が徐々に大きくなるコイルを用いることがある. このコイルにパルス電流を流した場合, 図2に示すような磁力線をもつ磁場ができる. この磁場中を進む粒子の軌道は図中に示したような螺旋となる. $z = z_1$ における磁束密度, 粒子の速さ, 径方向の位置をそれぞれ B_1, v_1, r_1 とし, $z = z_2$ における値をそれぞれ B_2, v_2, r_2 とする. また粒子の質量を m, 電荷を q とする. ここでは電場は存在しないと仮定すると, 運動エネルギーの保存則より $v_1 = v_2$ となる. また粒子は z 軸を中心とした運動をするものとする.

(1) 図2のような軸対称な磁場中を粒子がゆっくりと移動するとき, $\mu = \dfrac{mv^2 \sin^2\phi}{2B}$ で表される量は保存量となることが知られている. ここで ϕ は磁力線と粒子の速度ベクトルのなす角を表す. この値の保存則より ϕ_1 と ϕ_2 の関係を示せ.

(2) 磁場中での粒子のサイクロトロン半径は $r_c = \dfrac{mv\sin\phi}{qB}$ と表される. このことから r_1 と r_2 の関係を B_1, B_2 を用いて示せ.

(3) $B_1 = 4\,\mathrm{T}$, $B_2 = 1\,\mathrm{T}$, $r_1 = 1\,\mathrm{mm}$, $\phi_1 = 1\,\mathrm{mrad}$ のとき r_2 [mm], ϕ_2[mrad] を有効数字1桁で求めよ. ただし $\sin\phi = \phi$ と近似できるものとする.

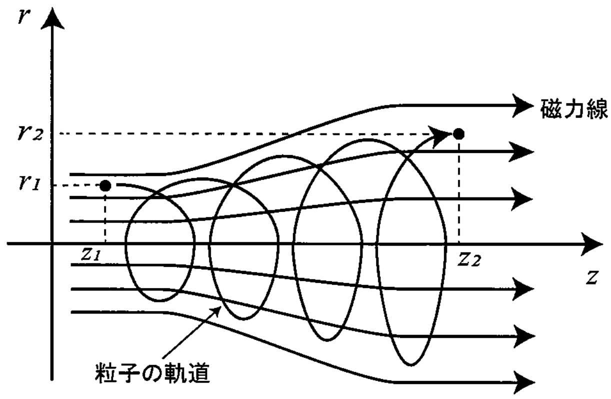


図 2: 内径が徐々に大きくなるコイルにパルス電流を流したときに作られる磁場の磁力線.

【問3】

図3はコイルにパルス電流を流すための回路を表している. はじめスイッチ SW1 が閉, スイッチ SW2 が開でコンデンサが電圧 V まで充電された状態になっているとする. 時刻 $t=0$ で SW1 が開, SW2 が閉になったとし以下の問に答えよ. ただしこの回路の方程式とその一般解は, 抵抗 R, 容量 C, インダクタンス L としたとき,

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=0 \tag{1}$$

$$I(t)=e^{-At}(\alpha e^{iBt}+\beta e^{-iBt}) \tag{2}$$

$$A=\frac{R}{2L},\quad B=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\quad \text{ここでは}\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2>0\text{とする.} \tag{3}$$

と表されることを用いてよい.

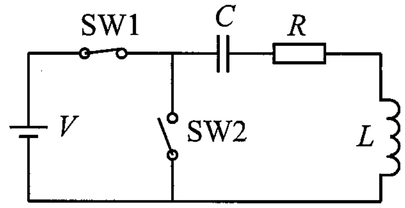


図 3: コイルにパルス電流を流すための回路図.

(1) $t=0$ でコイルに流れる電流は 0, コイルにかかる電圧は V であるという初期条件から係数 α, β を V, L, B を用いて表わせ.

(2) コイルに流れる電流 $I(t)$, およびコイルにかかる電圧 $e(t)$ を V, L, A, B を用いて表わせ.

(3) $I(t)$ が最大となる時刻 t_1 とそのときの電流 $I(t_1)$ を V, L, A, B を用いて表わせ.

(4) $L=1.0\,\mu\text{H}$, $R=2.0\,\Omega$, $C=0.5\,\mu\text{F}$, $V=20\,\text{kV}$ のとき, $I(t_1)$[kA] を有効数字2桁で求めよ. ただし以下の関係を用いてよい.
$\sin(\arctan x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $e^{-\pi/4}\approx 0.46$, $\sqrt{2}\approx 1.4$