総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

５年一貫制博士課程入学試験問題

数　学

令和３年８月１８日（水）９時３０分～１１時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること.

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること.

☆ 試験問題（４問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること.

☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第○○問□□枚目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること.

解答できない場合も，受験番号，氏名，問題番号を記入し，提出すること.

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に知らせること.

問題は次頁

第１問

以下の問いに答えよ．なお a は正の実数である．

【問 1】 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を示せ．

【問 2】 $\displaystyle I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-a(x-b)^2}\, x^2$ を求めよ．b は実数である．

【問 3】 $\displaystyle I_2 = \int d^3\mathbf{x}\, e^{-a|\mathbf{x}-\mathbf{b}|^2}\, |\mathbf{x}|^2$ を求めよ．

太文字 $\mathbf{x} = (x, y, z), \mathbf{b}$ は 3 次元実ベクトルを意味する．
3 次元積分記号は $\displaystyle\int d^3\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dxdydz$ である．

【問 4】 $\displaystyle \boldsymbol{I} = \int d^3\mathbf{x}\, e^{-\frac{a}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{b}_1|^2}\, (\mathbf{x}\times\nabla)\, e^{-\frac{a}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{b}_2|^2}$ を求めよ．

ここで $\times$ は 3 次元ベクトルの外積，また $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ は 3 次元実ベクトルである．

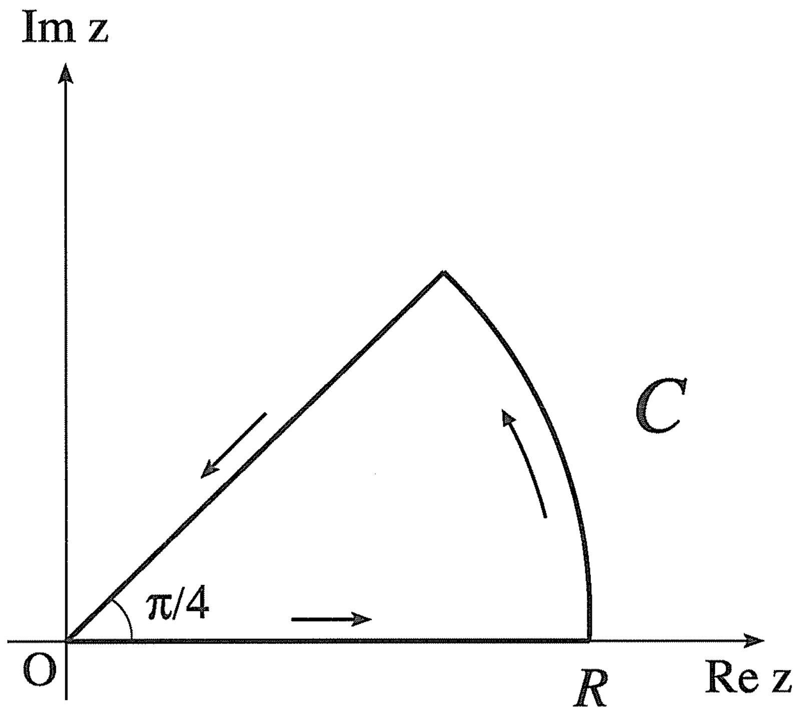
第２問

複素積分を利用し，以下の積分値を求めよ．なお $i=\sqrt{-1}$ である．

【問 1】 $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\frac{x\,e^{iax}}{x^2-(p+iq)^2}$ ここで a, p, q は正の実数とする．

【問 2】 $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\cos(x^2)$ 及び $I_3=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\sin(x^2)$

ヒント 以下のような積分路 C で複素積分 $\int_C dz\,e^{-z^2}$ を考えてみよ．



但し O は原点である．

第３問

以下のような 3×3 行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

【問 1】 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．
なお固有ベクトルは大きさ 1 に規格化しておくこと．

【問 2】 A を $A = O\Lambda\,{}^tO$ のように対角化する直交行列 O を作れ．
ここで ${}^tO$ は O の転置行列である．また Λ は対角行列

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

であるが，$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ とする．

【問 3】 行列 A のべき乗 A^n を求めよ．(n は正の整数)

第４問

実変数 x の実関数 $y(x)$ について，２階の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

を考える．p, q は実数とする．

【問 1】 微分演算子 $\dfrac{d}{dx}$ を $\hat{D}$ と書くことにする．このとき，変数 x の関数 $f(x)$ について，以下の式が成り立つことを確認せよ．なお a は定数とする．

$$e^{ax}\hat{D}\left(e^{-ax}f(x)\right) = \left(\hat{D}-a\right)f(x)$$

但し $\left(\hat{D}-a\right)f(x) = \dfrac{df(x)}{dx} - af(x)$ である．

【問 2】 $p^2 - q > 0$ のとき，この微分方程式の一般解を求めよ．

ヒント

変数 z の２次方程式 $z^2 + 2pz + q = 0$ の２つの解 α, β を用いて，

与えられた微分方程式を書き換えてみよ．

【問 3】 $p^2 - q < 0$ のときの一般解を求めよ．

なお, $y(x)$ が実関数であることに留意すること．

【問 4】 $p^2 - q = 0$ のときの一般解を求めよ．

【問 5】 この微分方程式に $y(0) = y(\pi) = 0$ という境界条件を課す．

【問 2】～【問 4】の結果を利用し, $y(x)$ が恒等的に０にならないためには

p と q がどのような条件を満たしていなければならないか述べよ．

またそのときの解を求めよ．