総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

５年一貫制博士課程入学試験問題

専門科目

令和元年８月２１日（水）１３時００分～１６時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること.

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること.

☆ ６問の中から，４問を選んで解答せよ.

ただし、素粒子原子核専攻理論部門を志望する（志望順位を問わず）受験者は第１問及び第２問を必ず選択しなければならない.

☆ 試験問題（４問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること.

☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第○○問□□枚目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること. 解答できない場合も，受験番号，氏名，問題番号を記入し，提出すること.

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に知らせること.

問題は次頁

第１問

１個の粒子がポテンシャル $V(x)$ の下で運動する１次元の量子系を考える．粒子の質量を m，換算プランク定数を $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ とするとき，以下の問に答えよ．

【問１】

原点 $x = 0$ の周りに振動する調和振動子系を考え，そのポテンシャルを $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ とする．

(1)　この調和振動子系のハミルトニアン（演算子）H を書き下せ．

(2)　この振動子系のエネルギー固有値方程式 $H\psi_n = E_n\psi_n$（$n = 0, 1, 2, \ldots$）を満たす固有状態 ψ_n のうち、基底（最低エネルギー）状態 ψ_0 と第１励起状態 ψ_1 をそれぞれ定数 a, b, c を用いて

$$\psi_0(x) = ae^{-bx^2}, \qquad \psi_1(x) = cxe^{-bx^2}$$

とするとき，定数 b とそれぞれのエネルギー固有値 E_0, E_1 を求めよ．

(3)　上記の２つのエネルギー固有状態 ψ_0, ψ_1 の規格化条件から，定数 a, c を求めよ．なお，a, c は上で求めた b を含む表式でもよい．もし必要であれば，公式 $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$（$\alpha > 0$）を用いよ．

【問２】

ここで問１の調和振動子系のポテンシャルを，２通りの方法で変化させることを考える．

(1)　まずポテンシャルの角振動数を ω から ω' に瞬間的に変化させ，変化後にエネルギーを測定して状態の遷移を調べる．変化の直前に系の状態が問１の基底状態 ψ_0 にあったとき，それが変化後に新たな基底状態 ψ'_0 に見いだされる確率はいくらか．なお，角振動数の瞬間的変化による状態への擾乱は無視してよい．

(2)　次に調和振動子の角振動数 ω は問１のままにして，系の左半分（$x < 0$）への粒子の侵入を完全に阻止し，右半分での運動のみ許されるようにする．このとき，この半直線（$x \geq 0$）上の調和振動子系のエネルギー基底状態 $\tilde{\psi}_0$ と，そのエネルギー固有値 $\tilde{E}_0$ を求めよ．

【問３】

さて今度は，ポテンシャル $V(x)$ の下での量子状態の時間発展を考えよう．

(1)　時刻 $t = 0$ の系の状態を $\psi(x, 0)$ とするとき，時刻 $t > 0$ での系の状態 $\psi(x, t)$ を求めたい．ポテンシャル $V(x)$ により束縛された系のエネルギー固有状態を $\psi_n(x)$，エネルギー固有値を E_n（$n = 0, 1, 2, \ldots$）とするとき，任意の初期状態 $\psi(x, 0)$ は展開係数を a_n として $\psi(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n(x)$ の形に展開できる．これを用いて，時刻 t での系の状態 $\psi(x, t)$ を書き下せ．

(2)　問１の角振動数 ω の調和振動子系の場合，系のエネルギー固有値の特殊性のため，一定の時間 $t > 0$ が経過すると，定数位相を除いて元の初期状態に回帰する（すなわち $\psi(x, t) = e^{i\delta}\psi(x, 0)$，$\delta$ は定数となる特別な t が存在する）．この回帰周期（そのような t のうち最小のもの）T を求めよ．

(3) 問 2 の (2) の半直線上の調和振動子系の場合にも，類似の回帰現象が生じる．この回帰周期を $\tilde{T}$ とするとき，上で求めた回帰周期 T との比 $\tilde{T}/T$ を求めよ．また，この結果に対する物理的な解釈を述べよ．

第２問

図 1 のように，一直線上に並べられた $N+1$ 個のボールを考える．一番左にあるボールの中心座標 x_0 は原点 $x_0=0$ に固定され，その他のボールは x 軸上を動くことができる．$N+1$ 個のボールの中心に対する座標値を x_i $(i=0,1,2,\ldots,N)$ とし，$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N$ を満たすものとする．すべてのボールの質量を m，半径を $a/2$ とする．隣り合うボールの間には力が働き，力のポテンシャル・エネルギーは，ボールの中心間の距離を r として，

$$V(r)=\begin{cases}+\infty & (r<a)\\ b(r-a) & (r\geq a)\end{cases}$$

で与えられる．ただし，$b>0$ は定数である．一番右にある座標値 x_N のボールに対して左向き（すなわち x 軸の負の方向）に外力 f を加える．ただし，$b+f>0$ を満たすものとする．この系を古典系と考え，系全体の温度を T として，以下の問いに答えよ．

ただし，換算プランク定数を $\hbar=h/(2\pi)$，ボルツマン定数を k_{B} とせよ．また，必要に応じて次の公式を用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

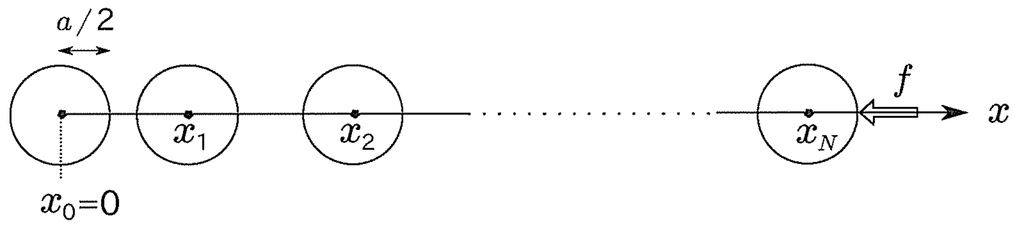


図 1: 一直線上に並べられたボール．

【問１】
各ボールの運動量を p_i と表し，関数 V をそのまま用いて全系のハミルトニアン H を書け．

【問２】
全系の分配関数 $Z=(2\pi\hbar)^{-N}\int d^N x\, d^N p\, e^{-H/(k_{\mathrm{B}}T)}$ を計算し，その答えが次式で与えられることを示せ．

$$Z=\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{N/2}\frac{(k_{\mathrm{B}}T)^{3N/2}}{(f+b)^N}e^{-Nfa/(k_{\mathrm{B}}T)}$$

ただし，$y_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,2,\ldots,N)$ という変数変換のヤコビアンは 1 であり，$d^N x=d^N y$ が成り立つことを使ってよい．

【問３】
全系の内部エネルギー U とエントロピー S を求めよ．さらに，外力 f が一定のもとでの比熱 C_f を求めよ．

【問４】
全系の長さ $X=x_N$ の期待値 $\langle X\rangle$ が偏微分 $(\partial/\partial f)\ln Z$ とどういう関係にあるかを示し，その値 $\langle X\rangle$ を求めよ．

【問５】
$|f|\ll b$ のとき，$\langle X\rangle$ と f の間に線形関係が成り立つことを示せ．このことから，この系全体はフックの法則が成り立つバネとみなせる．その自然長とバネ定数を求めよ．

第３問

質量 m の質点の３次元空間での非相対論的な運動を考える．質点には一様な重力が働いている．直交座標系 (x, y, z) を z 方向が重力と逆向きになるようにとり，ポテンシャルを $V = mgz$ とする（g は重力加速度で $mg > 0$ とする）．

【問１】

円筒座標系 (r, θ, z) を $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ となるようにとる．ラグランジアンを円筒座標で（$r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, z, \dot{z}$ の関数として）書け（$\dot{q}$ は変数 q の時間微分を表す）．ただし，ラグランジアンは運動エネルギーを T，ポテンシャルを V として $L = T - V$ と表される．

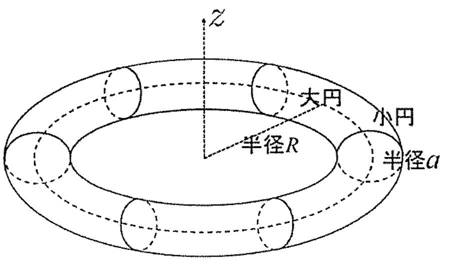
【問２】

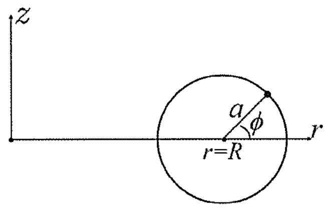
質点がトーラス上に拘束されている場合を考える．トーラスの大円は z 軸に垂直な面内にありその半径は R，小円の半径は a とする（ただし，$a < R$）．すなわち，r 及び z が角度 ϕ を変数として

$$r = R + a\cos\phi, \qquad z = a\sin\phi, \qquad (a < R)$$

と表されるように拘束されているとする．

以下では，質点の位置を新たな座標系 (θ, ϕ) で表すことにする．





(1)　ラグランジアンをこの座標系で（$\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}$ の関数として）書け．

(2)　このラグランジアンから θ についてのラグランジュ方程式を導出し，原点に対する角運動量の z 成分 (L_z) が一定であることを示せ．

ラグランジュ方程式は１つの運動の自由度 $(q, \dot{q})$ について，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

である．（t は時刻を表す）

また，原点に対する角運動量は位置ベクトルを $\vec{r}$，運動量を $\vec{p}$ として $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ と表される．

(3)　ϕ についてのラグランジュ方程式から，ϕ についての

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + f(\phi) = 0$$

の形の運動方程式を導き，L_z が定数であることから，$f(\phi)$ は ϕ のみの関数であることを示せ．

【問３】

(1) 問２の系において ϕ が時間によらず一定であるような状態が, $-\pi/2 \le \phi < 0$ の範囲と $\pi/2 \le \phi < \pi$ の範囲の各々にあることを示せ.

(2) $f(\phi) = 0$ の解の１つを ϕ_0 とし, ϕ の ϕ_0 からのずれを δ とする ($\phi = \phi_0 + \delta$).
ϕ についての運動方程式から, δ が小さい（$|\delta| \ll 1$）と仮定して δ の２次以上の項を無視することにより, δ についての運動方程式を書け. ただし,

$$f'(\phi) \equiv \frac{df(\phi)}{d\phi}$$

で定義される関数の ϕ_0 における値を $f'(\phi_0)$ としてそのまま用いてよい.

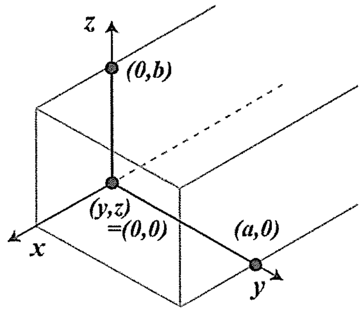
(3) $f(\phi) = 0$ の解のうち, $-\pi/2 \le \phi < 0$ の範囲の解を ϕ_0 とする.
時刻 $t = 0$ での δ ($\delta(0)$) と δ の時間微分 ($\dot{\delta}(0)$) が与えられ,

$$|\delta(0)| \ll 1, \quad \dot{\delta}(0) = 0$$

である場合に, (2) で求めた δ についての運動方程式を解け. ここでも $f'(\phi_0)$ を用いてよい.
また, この場合に運動が安定であること, すなわち, δ が０の近くで振動することを示せ.

第４問

図に示すような無限の奥行きを持つ直方体内を伝搬する電磁波を考える．直方体内部は真空，壁面は完全導体であると仮定する．



マックスウェル方程式（真空中）

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}/\mu_0 - \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$$

ϵ_0, μ_0は真空の誘電率と透磁率，
div, rot は発散,回転を表すベクトル作用素である．

直方体の各辺に平行な xyz 直交座標系を用い，この直方体内を伝搬する電磁波を変数 x, y, z を用いて表すものとする．図のように直方体の無限に伸びる方向を x 軸，その他の方向をそれぞれ y, z 軸とする．このとき，電磁波の分布は x 軸成分の波数 k を用いて以下のように変数分離型の解で表現できる．

$$\boldsymbol{E}(x, y, z, t) = \boldsymbol{E}(y, z)e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\boldsymbol{B}(x, y, z, t) = \boldsymbol{B}(y, z)e^{i(\omega t - kx)}$$

ここで ω は電磁波の角周波数,t は時間, $i^2 = -1$ である．以下，このことを用いて $B_x = 0$，$E_x \neq 0$ を満たす解を求める．ただし，直方体断面の y 軸方向の長さを a，z 軸方向の長さを b とし，各辺の交差する一点を yz 平面の原点とする．また, 式を簡単にするため $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, $\gamma^2 = \omega^2/c^2 - k^2$ とおく．

【問１】ベクトル $\boldsymbol{E}(y, z)$ の x 軸成分 E_x は下記の偏微分方程式に従うことを示せ．ただし，任意のベクトル $\boldsymbol{F}$ に対し，$\mathrm{rot\ rot}\boldsymbol{F} = \mathrm{grad\ div}\boldsymbol{F} - \Delta \boldsymbol{F}$ となることを用いてよい．grad と Δ は，それぞれ勾配とラプラス作用素 (勾配の発散) である．

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \gamma^2 E_x = 0$$

【問２】E_x の従う偏微分方程式は導体表面における境界条件を考えることで解くことができる．境界条件を示し，以下の式が境界条件を満たすことを確かめよ．

$$E_x = E_{mn} \sin(\frac{m\pi}{a} y) \sin(\frac{n\pi}{b} z)$$

ただし，m, n は任意の正の整数，E_{mn} は指数 m, n の組み合わせに対応する定数である．

【問３】【問２】で求めた解を【問１】の偏微分方程式に代入することで，ω と k が満たすべき関係を求めよ．また，この関係式から伝搬する電磁波の角周波数を a,b の関数として求めることができる．このうち最も低いものを $m = n = 1$ の場合に求めよ．(ヒント：k が虚数となる場合，電磁波が無限長の直方体内を伝搬することは不可能となる.)

【問４】マックスウェル方程式を解き，ベクトル $\boldsymbol{E}(y, z)$，$\boldsymbol{B}(y, z)$ の各成分 E_y, E_z, B_y, B_z を E_x, B_x の偏微分形式からなる関係式で書き下せ．

第5問

【問1】

正の電荷をもつミューオンは弱い相互作用により約 2μs の平均寿命で陽電子と二つのニュートリノに崩壊する.

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu_\mu}$$

宇宙線ミューオンを用いてこの崩壊事象を観測し，ミューオンの偏極度を測定することを考える．ミューオンはアルミニウム (非磁性体) 中で静止して崩壊するとし，陽電子が最大のエネルギーをもつ崩壊事象のみを観測するとして以下の問いに答えよ．

(1) 地上で観測されるミューオンは，宇宙線が大気上空 (地上からの高さ約 10000 m) にて空気分子との衝突により生成される π 中間子が崩壊して生じたものがほとんどである．相対論的効果による時間の遅れを考慮してミューオンが崩壊するまでの飛行距離を計算し，大気上空で生成したミューオンが地上まで到達することを確認せよ．ここで，ミューオンのエネルギーを 10 GeV/c^2 とし，簡単のため静止質量を 0.10 GeV/c^2 とする．また，ミューオンは光速 (3.0×10^8 m/s) で飛んでいるとしてよい．さらに，大気とミューオンは相互作用しないとする．

(2) 陽電子が最大のエネルギーをもつ崩壊事象のみを観測する場合，放出される陽電子の確率の角度分布 (dP) は，

$$dP = (1 + p\cos\theta)\frac{d\Omega}{4\pi}$$

と表される．ここで，生成される陽電子の進行方向と親ミューオンのスピン方向とのなす角を θ とし，p はミューオンの偏極度を表している．また，$d\Omega$ は微小立体角を表し極座標では $2\pi d(\cos\theta)$ となる．$\cos\theta > 0$ の場合を前方崩壊，$\cos\theta < 0$ の場合を後方崩壊と呼ぶ．それぞれの崩壊が起こる確率を p を用いて表せ．

(3) ミューオン崩壊を 4 事象観測したところ，2 事象が前方崩壊，残り 2 事象が後方崩壊であった．(2) の結果を用いて，ミューオンの偏極度 (p) が 1 の場合に，この観測結果が得られる確率を有効数字 2 桁で計算せよ．ただし，ミューオン崩壊を N 事象観測したとき，前方崩壊を N_f 事象，後方崩壊を N_b 事象観測する確率は二項分布に従い，

$$P_{\text{観測}} = \frac{N!}{N_f!N_b!}(P_f)^{N_f}(P_b)^{N_b}$$

と表せる．ここで，P_f, P_b は前方 (後方) 崩壊の起こる確率を表している．

(4) 前方崩壊・後方崩壊の非対称度を $A = (P_f - P_b)/2$ と定義する．ミューオン崩壊を N 事象観測したとき，観測される非対称度の誤差が，

$$\Delta A = \sqrt{\frac{P_f P_b}{N}}$$

となることを示せ．ただし，前方崩壊の事象数の標準偏差は $\Delta N_f = \sqrt{NP_fP_b}$ である．

(5) (4) の結果を用いて，ミューオンの偏極度を ± 0.01 の精度で確認するには崩壊事象を何事象観測すれば良いか有効数字 2 桁で計算せよ．ただし，簡単のため前方 (後方) 崩壊の確率を 0.75 (0.25) とする．

【問２】

ミューオンを図１のようなシンチレーションカウンターで測定する．ミューオンは図のように 2cm 厚のシンチレータに垂直に入射し，電離損失をおこして 1cm あたり 2 MeV のエネルギーを発生する．発生したエネルギーは全てシンチレータ中で光に変換され，光の 50%が光電子増倍管の光電面に到達し，それぞれの光子は 25%の確率で光電子に変換するとする．このとき以下の問いに答えよ．ここで，使用するシンチレータでは 1 光子を発生するのに 100 eV のエネルギーを必要とする．

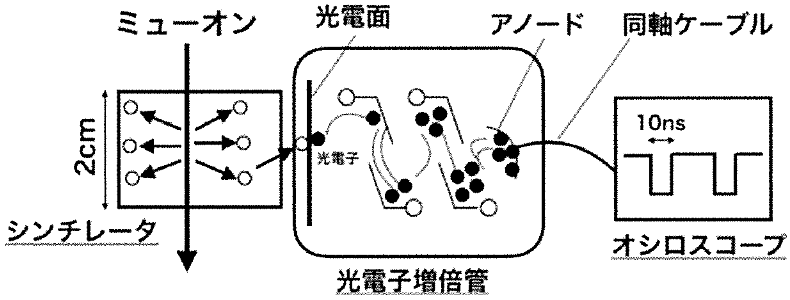


図 1: ミューオンの検出実験装置

(1) 光電面から放出される光電子数の平均個数を求めよ．

(2) 光電子増倍管に 1 光子が入射したときに得られる出力パルスの大きさを有効数字二桁で見積もれ．ただし光電子増倍管の増幅率を 10^6 とし，パルスは 10 ns 幅の矩形波とする．また，同軸ケーブルのインピーダンスを 50 Ω とし，電荷素量として $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C (クーロン) を用いよ．

(3) (1), (2) の結果から，この装置で 10^{-12} C までの信号が測定できる場合，何 eV のエネルギー (電離損失) に相当するか計算せよ．エネルギーとアノードに集荷される電荷量の間には線型性がよく成り立っているとする．

第 6 問

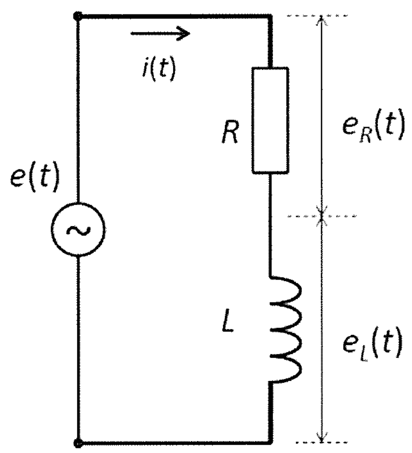
実験機器を動作させるには，交流電力が供給され，様々な形に変換され使用される．交流回路について以下の問いに答えよ．

【問 1】振幅 E_m の正弦波交流電圧 $e(t) = E_m \sin(\omega t + \theta)$ の実効値は$E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \{e(t)\}^2 dt}$ で与えられる．$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$ となることを示せ．

ここで $e(t)$ は電圧の瞬時値，T は正弦波の周期，$\omega = \frac{2\pi}{T}$ は角振動数である．

【問 2】交流回路を扱うとき，よく複素数表示が用いられる．電圧を $\hat{e}(t) = \hat{E}e^{j\omega t} = Ee^{j\theta}e^{j\omega t}$ とあらわすと，電圧の瞬時値は $e(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,\{\hat{e}(t)\}$ と書ける．このとき$\hat{E}$ を複素電圧と呼ぶ．ここで j は虚数単位，Im は複素数の虚部を表す．E は電圧の実効値である．同様に電流を $\hat{\imath}(t) = \hat{I}e^{j\omega t} = Ie^{j(\theta+\varphi)}e^{j\omega t}$ とあらわすと，電流の瞬時値は$i(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,\{\hat{\imath}(t)\}$ と書ける．このとき $\hat{I}$ を複素電流と呼ぶ．ここで I は電流の実効値である．

また，このときの複素インピーダンス$\hat{Z}$は，$\hat{Z} = \frac{\hat{E}}{\hat{I}}$ で与えられる．回路Ⅰに示す抵抗 R とインダクタンス L の直列回路に正弦波交流電圧 $e(t)$ を印加して十分な時間が経過したとき，電流 $i(t)$ が回路に流れるとする．以下の小問に答えよ．



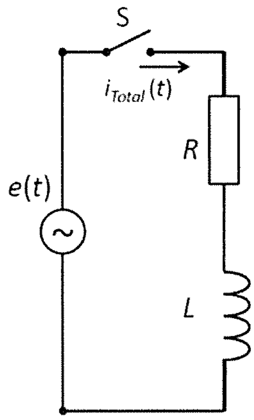
回路Ⅰ

(1) 抵抗 Rとインダクタンス Lについて $e_R(t) = Ri(t)$, $e_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ が成り立つことを用いて，$\theta = 0$ すなわち $\hat{e}(t) = Ee^{j\omega t}$ としたときの回路Ⅰの複素電流 $\hat{I}$ を求めよ．ここで $e_R(t), e_L(t)$ は，それぞれ R と L にかかる電圧を意味する(図：回路Ⅰを参照)．

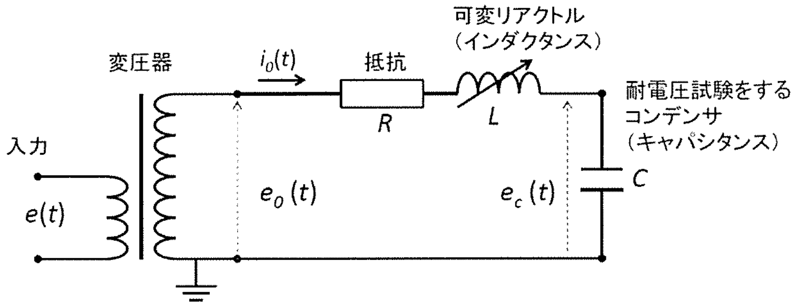
(2) 回路Ⅰの複素インピーダンス $\hat{Z}$ とその絶対値を求めよ．

(3) 回路Ⅰに流れる電流 $i(t)$ を求めよ．

【問 3】回路Ⅱでスイッチ S を時刻 $t=0$で閉じた後の過渡現象を考える．$t \geq 0$ に回路Ⅱに流れる電流は問 2 で求めた定常的な電流 $i(t)$ と，振幅が時間と共に変動する過渡電流 $i_t(t)$ の和として，$i_{Total}(t) = i(t) + i_t(t)$ とあらわされる．$i_t(t)$ が満たす微分方程式を示せ．また，$i_t(t)$ を求めよ．なお，入力電圧は $e(t) = E_m \sin(\omega t)$ とする．



回路Ⅱ



回路Ⅲ

【問 4】回路Ⅲを用いてコンデンサの耐電圧試験を行うことを考える．抵抗 R，インダクタンス Lの可変リアクトル，キャパシタンス Cのコンデンサを直列に接続し，変圧器で入力電圧 $e(t)$ を$e_0(t)$ に昇圧して回路に印加する．試験ではキャパシタンス Cに対し，インダクタンス Lを適切に調整することで回路は共振状態となり，回路に流れる電流$i_0(t)$ は最大となる．ここで，キャパシタンス Cについて，$e_c(t) = \frac{1}{C}\int i_0(t)\,dt$ の関係が成り立つ．以下の小問に答えよ．

(1) 回路Ⅲに示す RLC 直列回路の複素インピーダンス $\hat{Z}$ を求めよ．

(2) 回路Ⅲが共振する角振動数 ω_0を示せ．

(3) 共振条件が成り立つとき，回路に流れる電流 $i_0(t)$ とコンデンサに印加される電圧 $e_c(t)$ を，$e_0(t)$ を用いて求めよ．

(4) コンデンサに振幅 1.0×10^{6}V の交流電圧を印加したい．入力電圧 $e(t)$ の振幅を 1.0×10^{2}V，変圧器の昇圧比を 1:10，共振時のインダクタンス Lのインピーダンスを $\omega_0 L$= 10 Ωとしたとき，必要とする抵抗 R[Ω]の値を計算せよ．
計算結果は有効数字 2 桁で示せ．

(5) 非常に高い電圧を印加するコンデンサの耐電圧試験の方法の一つに，回路Ⅲのような RLC 直列共振回路を用いたものがある．
この方法の利点について考えられることを 2 つあげなさい．