総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

５年一貫制博士課程入学試験問題

数　学

平成３０年８月２２日（水）９時３０分～１１時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること.

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること.

☆ 試験問題（４問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること.

☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第○○問□□枚目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること.

解答できない場合も，受験番号，氏名，問題番号を記入し，提出すること.

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に知らせること.

問題は次頁

第１問

微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{x^2} = 0 \tag{1}$$

について以下の問いに答えよ．

【問１】(1) の解 $x(t)$ に対して

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 - \frac{1}{x(t)}$$

は，t によらないことを示せ．

【問２】$t=0$ において $x(0)=1$，$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = \sqrt{2}$ のとき，$x(t)$ を求めよ．

【問３】【問２】で求めた $x(t)$ を $t=0$ の近傍で３次の項までテイラー展開せよ．

第２問

２次元におけるベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y)=(A_x(x,y),A_y(x,y))$ として，次の２つの場合を考える．

(a) $A_x(x,y)=1, \qquad A_y(x,y)=-\dfrac{x}{y}$

(b) $A_x(x,y)=\dfrac{1}{x}, \qquad A_y(x,y)=-\dfrac{1}{y}$

以下の問いに答えよ．

【問１】(a)(b) のそれぞれについて，$\dfrac{\partial}{\partial x}A_y(x,y)-\dfrac{\partial}{\partial y}A_x(x,y)$ を計算せよ．

【問２】(a)(b) のそれぞれについて，始点と終点を持つ曲線 C に沿った $\boldsymbol{A}(x,y)$ の線積分

$$S_C=\int_C \boldsymbol{A}(x',y')\cdot d\boldsymbol{r'}$$

は，始点と終点の間の経路の取り方によるかよらないかを示せ．ただし，$\boldsymbol{r'}=(x',y')$ である．

【問３】【問２】で S_C が経路の取り方によらない場合，S_C は曲線 C の始点と終点のみによる．このとき，S_C の始点を基準点 $\boldsymbol{r_0}=(x_0,y_0)$ として固定し，終点を変数 $\boldsymbol{r}=(x,y)$ として，$S(x,y)$ を以下のように定義する．

$$S(x,y)=\int_{\boldsymbol{r_0}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{A}(x',y')\cdot d\boldsymbol{r'}$$

(a)(b) のうち，S_C が経路の取り方によらない場合について，$S(x,y)$ を求めよ．

第３問

次のように定義されるグリーン関数 $G(x,t)$ について，以下の問いに答えよ．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)G(x,t)=-\delta(x)\delta(t) \tag{2}$$

$$G(x,t)=0 \qquad (t<0)$$

ただし，関数 $F(x,t)$ のフーリエ変換 $\hat{F}(k,\omega)$ 及びその逆フーリエ変換は次のように定義される．

$$\hat{F}(k,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{i(kx-\omega t)}F(x,t)$$
$$F(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,e^{-i(kx-\omega t)}\hat{F}(k,\omega)$$

また，

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-x^2}=\sqrt{\pi}$$

を用いてよい．

【問１】(2) の両辺をフーリエ変換することにより，$G(x,t)$ のフーリエ変換 $\hat{G}(k,\omega)$ を求めよ．

【問２】$\hat{G}(k,\omega)$ の逆フーリエ変換において，ω 積分を実行した結果を求めよ．

【問３】続いて，k 積分を実行して $G(x,t)$ を求めよ．

第４問

４行４列の行列

$$A = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{n} \sin\theta + \beta \cos\theta$$

について以下の問いに答えよ．

ただし，$\boldsymbol{n}$ は３次元の単位ベクトル（$\boldsymbol{n}^2 = 1$），$\boldsymbol{\alpha}$，β はディラック行列

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

I は２行２列の単位行列，$\boldsymbol{\sigma}$ はパウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．

【問１】$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbf{1}$, $\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = \mathbf{0}$, $\beta^2 = \mathbf{1}$ を示せ．ただし，$\mathbf{1}$，$\mathbf{0}$ は，それぞれ，４行４列の単位行列，零行列である．（パウリ行列の性質 $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}I$ は既知としてよい．）

【問２】$A^2 = \mathbf{1}$ を示せ．

【問３】A のすべての固有値及び固有ベクトルを求めよ．ただし，固有値が縮退している場合には，固有ベクトルは適当な基底を選べ．