総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

５年一貫制博士課程入学試験問題

数　学

平成２９年８月２３日（水）９時３０分～１１時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること.

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること.

☆ 試験問題（４問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること.

☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第○○問□□枚目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること.

解答できない場合も，受験番号，氏名，問題番号を記入し，提出すること.

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に知らせること.

第１問

トレースがゼロの 3×3 のエルミート行列は次の８個の行列の線形結合で表される．

$$T_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_4 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_5 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_6 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_7 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_8 \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

【問１】T_1^2 及び T_1^3 を求めよ．またその結果を用いて T_1^n (n: 自然数) を求めよ．

【問２】$\{T_2, T_3, \cdots, T_8\}$ の中で T_1 と可換となるものを選べ．

【問３】【問１】の結果を参考にして $g \equiv \exp\{i(\theta T_1 + \varphi H)\}$ を計算し，3×3 の行列で表せ．ここで，H は【問２】で選んだ行列を表す．

第２問

関数 $f(x)$ についての２階微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) - 4f(x) = \frac{4}{\cosh(2x)} \tag{1}$$

を定数変化法で解く．

【問１】斉次方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) - 4f(x) = 0 \tag{2}$$

の独立解 $f_1(x)$, $f_2(x)$ を求めよ．

【問２】(2) の一般解は C_1, C_2 を積分定数として

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

と表される．ここで (1) の特解を求めるために C_1, C_2 を x の関数に拡張する．【問１】で求めた解を用いて

$$f(x) = C_1(x) f_1(x) + C_2(x) f_2(x)$$

を方程式 (1) に代入することにより $C_1(x)$, $C_2(x)$ についての微分方程式が得られる．ただし，$C_1(x)$, $C_2(x)$ の間には

$$\left(\frac{d}{dx}C_1(x)\right) f_1(x) + \left(\frac{d}{dx}C_2(x)\right) f_2(x) = 0$$

という関係があることを仮定する．これらを連立させて，$C_1(x)$, $C_2(x)$ それぞれについての１階微分方程式を導け．

【問３】【問２】で導いた微分方程式を解いて (1) の特解を求め，【問１】の結果と併せて一般解を得よ．

第３問

関数 $f(x)$ のフーリエ変換は

$$f(x) \to F(k) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x),$$

逆フーリエ変換は

$$F(k) \to f(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} F(k)$$

で定義される.

【問１】 $e^{-|x|}$ をフーリエ変換せよ．(x は実数とする．)

【問２】 【問１】の結果を逆フーリエ変換して元に戻ることを示せ.

ヒント) k の積分領域 $[-\infty, \infty]$ を複素平面上で考えて適当に閉曲線に拡張し，留数定理を用いよ．その際，x の符号によって適切に閉曲線を選ぶべきことに注意せよ.

留数定理

解析関数 $g(z)$ が閉曲線 C に囲まれた領域に特異点 $z = z_i$ を持つ場合，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\, g(z) = \sum_i \mathrm{Res}\,(z_i)$$

が成り立つ．ここで $\mathrm{Res}\,(z_i)$ は $z = z_i$ における留数を表し, 線積分は反時計回りの方向に行うとする.

第４問

【問１】３次元空間中の円筒 $(x-1)^2+y^2=1$ と平面 $z=0$ の交差する部分 C を考える．この閉曲線 C は実数パラメータ t を用いて

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t)$$

のように表せる．関数 $y(t)$ を $y(t)=\sin t$ と選んだ場合に $x(t), z(t)$ を求めよ．ただし，t を $0\to 2\pi$ と動かした場合に $z>0$ の側から見て反時計回りに動くように $x(t)$ の符号を選ぶとする．

【問２】ベクトル場

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

に対し，線積分

$$\oint_C d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}$$

を計算せよ．ただし C は【問１】の閉曲線とし，接線ベクトル $d\boldsymbol{r}$ は $z>0$ の側から見て反時計回りの方向を正ととる．

【問３】ストークスの定理より,【問２】の線積分は次の面積分に等しい．

$$\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}. \tag{3}$$

ここで２次元曲面 S は

$$\begin{pmatrix} x(\theta,\varphi) \\ y(\theta,\varphi) \\ z(\theta,\varphi) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, \quad 0\le\varphi<2\pi\right)$$

で表される半球面で，$d\boldsymbol{S}$ は

$$d\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \end{pmatrix} d\theta d\varphi$$

で与えられる．これらを用いて，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(= \nabla \times \boldsymbol{A})$ 及び $d\boldsymbol{S}$ の具体形を求めよ．

【問４】【問３】の結果を用いて面積分 (3) を計算し，それが【問２】の結果に等しいことを示せ．