

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究所

5年一貫制博士課程入学試験問題

専門科目

平成27年8月26日(水) 13時00分～16時00分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。

☆ 6問の中から、4問を選んで解答せよ。

ただし、素粒子原子核専攻理論部門を志望する(志望順位を問わず)受験者は第1問及び第2問を必ず選択しなければならない。

☆ 試験問題(4問)ごとに、異なった答案用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること。解答できない場合も、受験番号、氏名、問題番号を記入し、提出すること。

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に知らせること。

問題は次頁

第1問

【問1】

図1のような中性子線源と2重スリットを用いた中性子の干渉実験を考える。まずスリット S_1 のみを開いた場合の中性子の状態を $|\psi_1\rangle$ とし、この状態の下で中性子がスクリーン上の点 Q (位置座標 x) に到達する確率振幅を $A_1 = \langle x|\psi_1\rangle$ とすれば、その確率は $P_1 = |A_1|^2$ で与えられる。同様に、スリット S_2 のみを開いた場合の状態を $|\psi_2\rangle$ とし、そのときのスクリーン上の点 Q に到達する確率振幅を $A_2 = \langle x|\psi_2\rangle$ とすれば、その確率は $P_2 = |A_2|^2$ で与えられる。このとき、以下の設問に答えよ。なお、計算において微小量 $\epsilon \ll 1$ に対する近似式 $\sqrt{1+\epsilon} = 1 + \frac{\epsilon}{2}$ を使って良い。

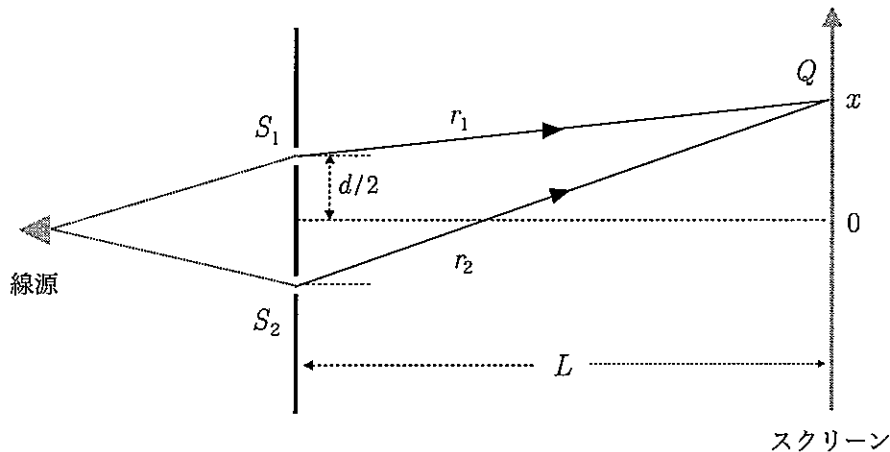


図1: 中性子を用いた2重スリット干渉実験.

- (1) スリット S_1, S_2 の両方を開いた場合の中性子の状態は、重ね合わせ状態 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)$ で与えられる。このとき、中性子がスクリーン上の点 Q に到達する確率 P を、 A_1 と A_2 を用いて表せ。
- (2) 中性子の運動量を p 、それぞれのスリットから点 Q までの距離を r_1, r_2 とするならば、確率振幅は極形式を用いて $A_k = |A_k| e^{ipr_k/\hbar}$ ($k=1,2$) と表せる ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$ は換算プランク定数)。2つのスリット間の間隔を d 、スリットからスクリーンまでの距離を L とするとき、スクリーンに到達する確率を位置 x の関数 $P = P(x)$ として求めよ。但し、スクリーンまでの距離 L はスリット間隔 d に比べて十分大きく ($\frac{d}{L} \ll 1$)、また $|A_k|$ の x 依存性は位相部分に比べて小さく無視できるものとする。
- (3) 線源のエネルギー E が十分小さく $E = \frac{p^2}{2m}$ が成立するとき、スクリーン上の干渉縞の間隔(確率分布が極大 $P(x) = P_{\max}$ となる隣接点 x 間の距離) λ を d, L, m, E 及び \hbar を用いて表せ。また、 S_2 に比べて S_1 を通る可能性が圧倒的に大きく、その比率が $\frac{|A_2|^2}{|A_1|^2} = 0.04$ で与えられる場合に見られる、確率分布の極大極小の比率 $R = \frac{P_{\min}}{P_{\max}}$ の値を求めよ。

【問2】

中性子がスピン $\frac{\hbar}{2}$ を持つ粒子であることを利用して、スクリーン上で検出された中性子がどちらのスリットから来たものかを判定できるようにしたい。このため、図2のようにそれぞれのスリットの直前に、スピンを偏極させる装置 (SP_+ または SP_-) を設置して、スリット S_1 ではスピンの $+z$ 方向を向いたもののみが通過できるようにし、反対にスリット S_2 ではスピンの $-z$ 方向を向いたもののみが通過できるようにする。このとき、スピン演算子を $\frac{\hbar}{2}\sigma_i$ ($\sigma_i, i = x, y, z$, はパウリ行列) とすれば、中性子の状態は σ_z の固有状態 $\sigma_z|\pm z\rangle = \pm|\pm z\rangle$ を用いて

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle|+z\rangle + |\psi_2\rangle|-z\rangle)$$

と表される。一方、スクリーンの粒子検出器の直前にも偏極装置 SP'_+ を置いて、スピンの $+z$ 方向を向く中性子のみが検出されるようにする。また、スリットとスクリーンの間に x 軸方向の磁場 $\vec{B} = (B, 0, 0)$ を加えられるようにしておく。

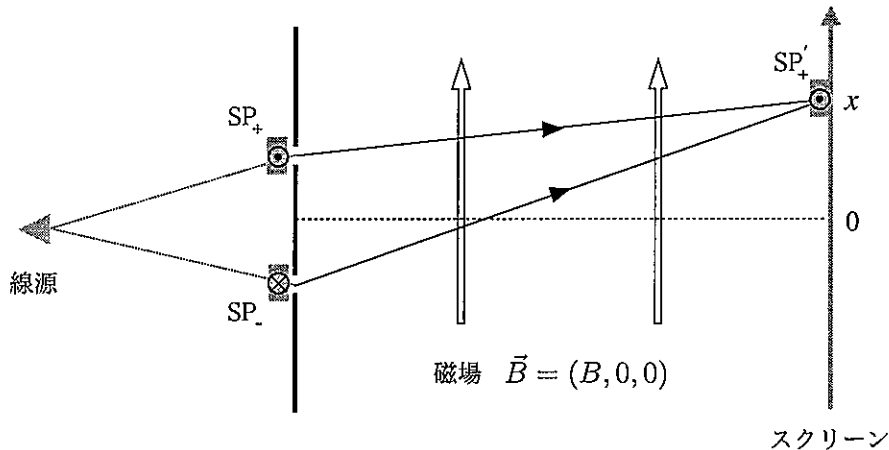


図2: スピン偏極装置 SP_{\pm} , SP'_+ 及び磁場 \vec{B} を加えた干渉実験。図で紙面の裏から表に抜ける方向が z 軸の正方向。

- (1) まず磁場のないとき ($B = 0$) に中性子が点 Q (位置座標 x) に到達する確率 P を、 A_1 と A_2 を用いて表せ。またこの結果は、波動と粒子の二重性 (あるいは相補性) の観点からどのように解釈できるか述べよ。
- (2) $B = 0$ のままで、スクリーン直前の偏極装置 SP'_+ を取り外してスピンを選別せずに測定することを考える。この場合の点 Q に到達する確率 P を、 A_1 , A_2 を用いて表せ。

ここで磁場 \vec{B} を加えよう。時刻 t での中性子のスピン状態を $|\chi(t)\rangle$, 磁気モーメントを μ とすると、スクリーンに到達するまでの間、中性子のスピン成分はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\chi(t)\rangle = -\mu \vec{\sigma} \cdot \vec{B} |\chi(t)\rangle = -\mu B \sigma_x |\chi(t)\rangle$$

に従って時間発展する。以下、中性子のスリット通過時を $t = 0$ 、スクリーン到達時を $t = T$ とする。

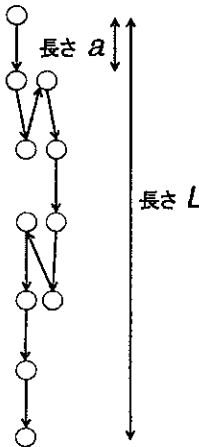
- (3) 磁場のあるとき $B > 0$ 、初期状態 $|\chi(0)\rangle = |+z\rangle$ 及び $|\chi(0)\rangle = |-z\rangle$ それぞれの場合のスクリーン到達時のスピン状態 $|\chi_{\pm}(T)\rangle$ を求めよ。 $(\sigma_x$ の固有状態 $\sigma_x|\pm x\rangle = \pm|\pm x\rangle$ は、 $|\pm x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+z\rangle \pm |-z\rangle)$ で与えられることを利用しても良い.)
- (4) (3) の設定の下、スクリーン到達時のスピン状態 $|\chi_{\pm}(T)\rangle$ がいずれもスピン $+z$ 成分と $-z$ 成分の両成分を同確率で含むような最小の磁場 B の大きさを B_0 とするとき、この B_0 を μ, T 及び \hbar を用いて表せ。
- (5) 磁場がちょうど B_0 になるように調整し、その上で(1)のようにスクリーン上で偏極装置 SP'_+ を置いてスピンの $+z$ 成分を持つ中性子のみを検出したとき、測定される確率分布 $P(x)$ はどのようなになるか。またこの結果は、波動と粒子の二重性（あるいは相補性）の観点からどのように解釈できるか述べて。

第2問は次頁

第2問

伸び縮みするゴムの模型として、下図のような N ($\gg 1$) 本の鎖の要素が1次元的につながった模型を考える。各鎖の要素は他の要素とは独立に、上向きまたは下向きの二つのどちらかの配位を自由にとることができる。各鎖の要素が下、上を向くのに必要なエネルギーをそれぞれ E_d, E_u ($= E_d + \Delta E > E_u$) とする。このような鎖全体の両端に働く張力を求めよう。

各鎖の要素は長さ a をもち、鎖の要素をつなぐ関節 (○印) は大きさをもたないとする。鎖全体の両端の距離を L (> 0) とすると、 L の最大値は、全ての鎖の要素が下向きになった時の値 $L_{max} = Na$ で与えられる。また a は、 L の変化 ΔL に比べて十分に小さく、 L を連続変数として扱ってよいとする。ボルツマン定数は k_B とする。



「左図の説明」: $N=10, L=6a$ の例を図示

長さ a の鎖の要素 N 本が1次元的につながれている様子。各要素の長さを a とし、鎖全体の両端の距離を L とする。各鎖の要素は、上下二通りの配位のどちらかをとる。

「注意」

左図では描画の都合上、鎖が左右に揺れ、また○印は大きさをもっているように描かれている。

【問1】

- (1) 鎖全体の両端の距離 L が与えられたとき、この鎖全体を構成する配位の数 W とエントロピー S を (L, N, a) を用いて表せ。1 より十分大きな整数 M に対しては、Stirling の公式 $\log M! \sim M(\log M - 1)$ が近似的に成り立つ。
- (2) 鎖が絶対温度 T の熱平衡にある場合を考えよう。このとき、全系がもつヘルムホルツの自由エネルギー $F = E - TS$ を計算せよ。
- (3) 鎖の両端を長さ L の距離に保つためには、鎖の両端に力を加え、張力 K とバランスさせる必要がある。張力は、(温度一定の条件下で) 自由エネルギー F を距離 L について変分すると得られる。鎖の張力 K を求めよ。
- (4) 条件 $L \ll L_{max}$ を満たすときの、自由エネルギー F と張力 K の近似式を求め、長さ L の関数として図示せよ。また、鎖が安定する場所での、鎖の両端の距離 L_0 を求めよ。
- (5) L が $L=L_0$ の近傍では、張力 K が $(L-L_0)$ に比例することを示し、比例係数(弾性定数) α が温度に比例することを示せ。また、条件 $L \ll L_{max}$ が満たされない領域で張力 K はどう振る舞うかを予想せよ。

【問2】

以下では議論する力を見る。よって必ずしも正解は一通りとは限らない。

(1) 上の系は、伸び縮みするゴムの模型と考えられる。通常のスプリングはエネルギーが長さに依存することから弾性力が生まれるが、ゴムはエントロピーが長さに依存することで弾性力が生まれる。微視的な構造を見ることなく、両者を区別することができるか？

(2) ゴムのようにエントロピーの変化で発生する力をエントロピー力とよぶ。

自然界に存在する力でエントロピー力と考えられるものは、ゴムの弾性力以外にどのようなものがあるだろうか。そう考える根拠を述べよ。

(ヒント：自然界には様々な力がある “電磁気力”、“遠心力”、“表面張力”、“気体の圧力”、“重力”、“宇宙を加速膨張させる力” など)

第3問

【問1】

一様な静電場 $E_x = -E_0$ のなかの電子（質量 m 、電荷 $-e$ ）の一次元運動を考える。 $E_0 > 0$ とし、時刻 t での電子の位置を x 、時間微分を $dx/dt = \dot{x}$ で表すものとする。ここでは、電子の速さが光の速さ c より十分小さいとして、まず非相対論的に電子の運動を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 電子の運動エネルギーを $T = m\dot{x}^2/2$ 、ポテンシャルを $U = -eE_0x$ とすると、ラグランジアンは、

$$L = T - U,$$

となる。このとき、電子の運動はオイラー・ラグランジュ方程式、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

に従う。電子の運動方程式 (x に関する微分方程式) を求めよ。また、この運動方程式を解いて、 x と \dot{x} を t の関数として示せ。ここで、初期条件として時刻 $t = 0$ で、 $x = 0$ 、 $\dot{x} = 0$ とする。

- (2) 一般化運動量を $p = \partial L / \partial \dot{x}$ で与えたとき、ハミルトニアンは、

$$H = p\dot{x} - L,$$

で与えられる。 p と x を用いて電子のハミルトニアンを表せ。

- (3) ハミルトニアンを用いると、電子の運動は正準方程式、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned}$$

によって記述される。これを解いて、 p を t の関数として示せ。初期条件は問1の(1)と同じとする。

【問2】

電子の運動量が大きくなってくると、相対論的な扱いが必要となる。ここでは、問1と同じ様な静電場のなかの電子の運動を、今度は相対論的に考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 相対論的に取り扱おうと、ラグランジアンは、

$$L = -mc^2/\gamma + eE_0x,$$

と表される。ここで、 $\gamma = \sqrt{1/(1 - (\dot{x}/c)^2)}$ 、 c は光の速さである。一般化運動量 $p = \partial L/\partial \dot{x}$ が $m\dot{x}\gamma$ となることを示せ。また、 $p = mc\sqrt{\gamma^2 - 1}$ となることを示せ。

- (2) このラグランジアンからハミルトニアンを求めたい。 $p\dot{x}$ を γ で表したあと、ハミルトニアンは次式となることを示せ。

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} - eE_0x.$$

- (3) このハミルトニアンを用いて、正準方程式から運動方程式を求めよ。また、これを解いて、 p を t の関数として示せ。ここで、初期条件として、時刻 $t = 0$ で $x = 0, p = 0$ とする。

- (4) \dot{x} を t の関数として示せ。

【問3】

問2で計算したように、 mc よりも十分大きな運動量をもつ電子は、ほぼ光の速さで運動する。加速器のなかの高エネルギー電子はこの条件を満たすため、その速さを光の速さ c で一定とするのがよい近似となる。この条件のもとで、図1に示すモデル加速器のなかでの x 軸上の電子の加速運動を考える。

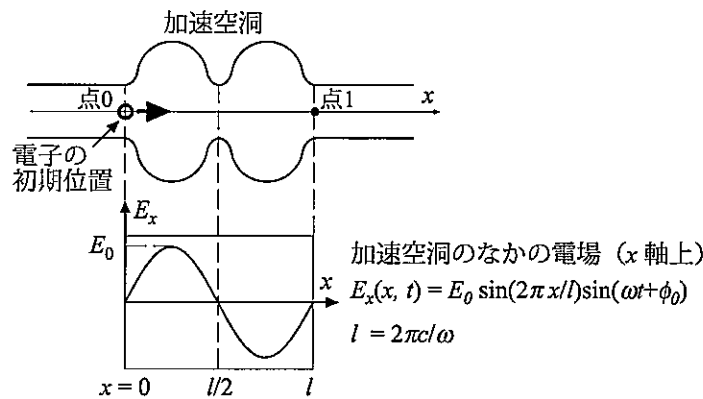


図1: 加速器モデルの概略図。加速空洞のなかに時間変化する x 軸方向の電場がある。

加速空洞のなかには、 $x = 0$ から $x = l$ の範囲で、

$$E_x(x, t) = E_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{l}\right) \sin(\omega t + \phi_0),$$

という周期的に時間変化する電場があるとし、 $E_0 > 0$ とする。加速空洞の長さは、 $l = 2\pi c/\omega$ に調整されているものとする。また、 x 軸上の磁場はゼロであると、磁場の効果は考えない。

電子の運動量を $p = m\dot{x}\gamma$ として、電子は次式の相対論的な運動方程式にしたがうものとする。

$$\frac{dp}{dt} = -eE_x(x, t).$$

初期条件として、時刻 $t = 0$ のとき、 $x = 0$ 、および $p = p_0$ とする。初期運動量 p_0 は mc よりも十分大きいとし、また電場による運動量変化 Δp は p_0 に比べて十分小さいとして、常に、

$$x(t) = ct,$$

と表せるとして、以下の問いに答えよ。

- (1) 電子の運動方程式が次式となることを示せ。

$$\frac{dp}{dt} = -eE_0 \sin(\omega t) \sin(\omega t + \phi_0).$$

- (2) 時刻 $t = 0$ に加速空洞入口 (点 0) を出発した電子が、加速空洞出口 (点 1) に到達する時刻 t_1 を ω を用いて表せ。次に、運動方程式を時刻 $t = 0$ から t_1 にわたって積分し、加速空洞による運動量の変化 Δp を電場の初期位相 ϕ_0 の関数として求めよ。また、 Δp と ϕ_0 の関係を図に示し、 Δp が最大となる位相 ϕ_m を求めよ。

第4問は次頁

第4問

静磁場中を動く細い電導線について以下の問いに答えよ。電導線は変形しないものとする。電導線内には電導線の長さ方向にのみ移動できる電子（電荷 $-e$ ($e>0$))があり、電導線を通る電流はこれらの電子の動きによるものであり、電流量は各電子に働く平均的な力に比例するとする（電導線内の微視的な構造は考えなくてよい）。また、それぞれの問いの場合において、電導線を通る電流は電導線のどこでも同じであるとする。すべての運動は非相対論的であるとせよ。

必要なら以下を使ってよい。

速度 \vec{v} で動く電荷 q が電磁場（電場 \vec{E} 、磁束密度 \vec{B} とする）から受ける力

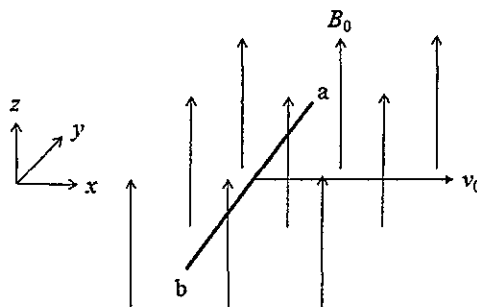
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{式 A1})$$

静磁場中に置かれた電流(I)の流れる電導線の微小部分が受ける力($d\vec{s}$ の方向は電流の流れる向き、その大きさは電導線の微小部分の長さ、 \vec{B} を磁束密度とする)

$$d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B} \quad (\text{式 A2})$$

【問1】

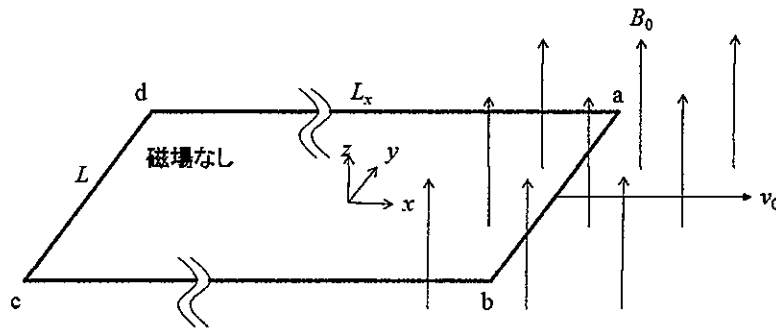
図のような z 方向の一様磁場（磁束密度 B_0 ）の中に y 方向に置かれた長さ L の細い電導線を考える。電導線は x 方向に一定の速度 v_0 で動いているとする。図のように電導線の両端を a, b とすると、各点の位置は直交座標 (x, y, z) で時刻を t として、 $a: (v_0 t, L/2, 0)$ 、 $b: (v_0 t, -L/2, 0)$ で表される。以下に答えよ。



- (1) 電導線内の電子がこの一様磁場から y 方向に受ける力を求めよ。
- (2) このとき、電導線の両端に生じている電位差を V_0 とする（ a 点の電位を0としたときの b 点の電位を V_0 とする）。電導線には電流が流れていないことに注意して、 V_0 を L, v_0, B_0 で表せ。

【問2】

図のように、 x 方向と y 方向に平行な細い電導線でできた長方形のコイルを考える。コイルは x 方向に長さ L_x 、 y 方向に長さ L とする。コイル全体は x 方向に一定の速度 v_0 で動いているとする。図のように長方形の各頂点を a, b, c, d とすると、各頂点の位置は直交座標系 (x, y, z) で時刻を t として、 $a: (v_0t, L/2, 0)$, $b: (v_0t, -L/2, 0)$, $c: (-L_x + v_0t, -L/2, 0)$, $d: (-L_x + v_0t, L/2, 0)$ で表される。 L_x は十分に長く、線分 ab の周辺には z 方向の一様磁場(磁束密度 B_0)があり、線分 cd の周辺には磁場が存在しないものとする。また、どの場所にも z 方向の静磁場以外には外部の電磁場が存在しないとし、コイルを流れる電流が作る磁場は無視するものとする。



- (1) 電導線の長さ当たりの抵抗が場所に依らず、その値が r (長さ l の電導線の抵抗は rl) であるとして、このコイルを流れる電流を求めよ。また、コイル内の b, c, d 各点での電位を求めよ。ただし、電流は $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ の向きを正とし、コイル内の a 点の電位を 0 とせよ。結果には【問1】(2)の V_0 を用いてよい。
- (2) このコイルが磁場から受ける x 方向の力の合計を求めよ。結果には【問1】(2)の V_0 を用いてよい。
- (3) コイルを x 方向に一定の速度 v_0 で動かすのに必要な仕事率が、コイル内で消費される電力に等しいことを、エネルギー保存則を使わずに示せ。

第5問

【問1】

地表に到達する宇宙線のほとんどはミューオンである。図 1.1 のような実験配置を用いて、ミューオンの寿命を測定した。ほとんどのミューオンは、3 枚のシンチレータを突き抜けるので、3 枚のシンチレータからの信号は、同時に発生する。極稀にミューオンがシンチレータ 1 と 2 を通過した後、アルミニウム板で止まるものがある。止まったミューオンは崩壊して電子を放出するので、シンチレータ 3 から出る少し遅れた信号を検出することによりミューオンの寿命が測定できる。シンチレータ 1 と 2 の信号が同時に発生していて、さらに、シンチレータ 3 の信号がある時間遅れて発生しているものを測定する。回路上は遅れて出るシンチレータ 3 の信号と合わせるために、シンチレータ 1 と 2 の同時信号を遅らせることになる。遅れの時間を変えながら事象数を測定した結果が図 1.2 である。この図の測定数からは 3 枚のシンチレータとも同時に通過した場合（遅延時間：0 μ sec）は除いている。ここで同時とは時間差 0.1 μ sec 以内のことである。これに関して以下の設問に答えよ。

- (1) 遅延時間が 12 μ sec 以降で測定数が一定になるのはなぜか。
- (2) 遅延時間 2-6 μ sec の範囲でグラフより数値を読み取り、ミューオンの寿命を求めよ。必要に応じて下記の自然対数を用いて、有効数字 2 桁で答えよ。

ln2	ln3	ln5	ln7
0.69	1.10	1.61	1.95

- (3) 遅延時間が最も短い点(0.2 μ sec)は寿命測定には適さないが、その理由を答えよ。

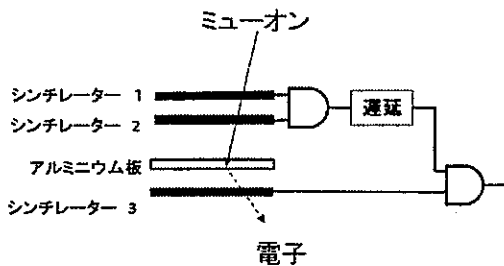


図 1.1 実験配置

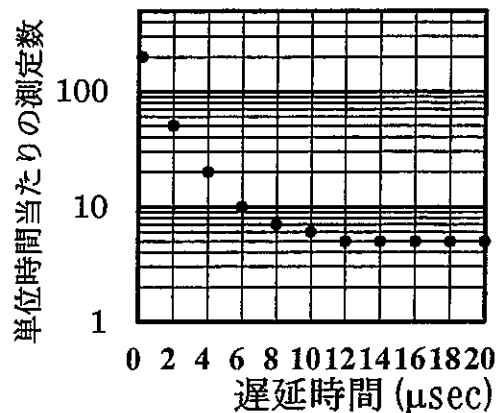


図 1.2 測定結果

【問 2】

放射線源セシウム 137 から放出されるガンマ線 (エネルギー:0.66MeV) を NaI シンチレータと光電子増倍管を用いて測定した. 図 2.1 がそのときの実験配置である. 図 2.2 が得られたエネルギースペクトラムである. これに関して以下の設問に答えよ. 有効数字は2桁とする.

- (1) 図 2.2 中に示されているピーク(A)は何と呼ばれているか. また, そのエネルギーはいくらであるか.
- (2) 入射ガンマ線が静止している電子とコンプトン散乱することを考える. 出てくる散乱ガンマ線のエネルギー E_{out} を入射ガンマ線のエネルギー E_{in} , ガンマ線の散乱角 θ と電子の静止質量 m との関数で表せ. 散乱角は入射ガンマ線の入射方向から測るものとする.
- (3) 図 2.2 中に示されている折れ曲がり部分 (B) は何と呼ばれているか. また, そのエネルギーはいくらであるか. ここで電子の静止質量は $0.51\text{MeV}/c^2$ とする. ただし, c は光速である.
- (4) 図 2.2 中に示されたピーク (C) が現れる理由を答えよ. また, そのエネルギーはいくらか.

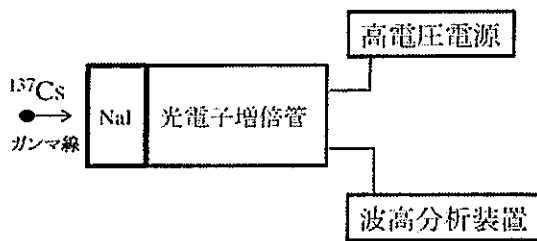


図 2.1 実験配置

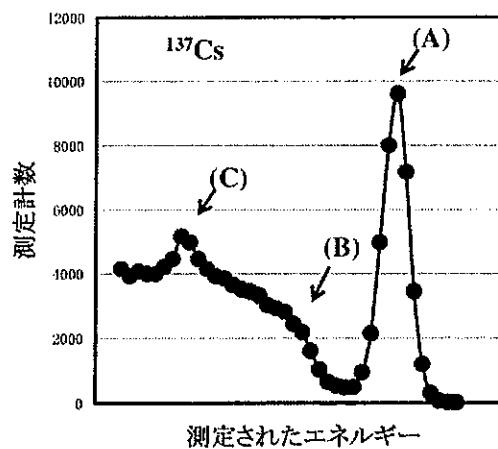


図 2.2 測定結果

第6問

加速器のビームは気体との相互作用を抑えるため、真空にした容器の中を進行させることが多い。ここでいう真空とは、通常の大気圧より低い圧力の気体で満たされた空間の状態である。ここでは真空にした容器内の圧力について考える。気体は理想気体とする。また容器内は気体の排気を始めてから十分時間が経過しており、定常状態になっているとする。計算結果は有効数字2桁で求めよ。

【問1】

1. 単位時間にある断面を通過する気体の量は流量と呼ばれる。流量は気体の圧力 p [Pa]と単位時間にある断面を通過する気体の体積 V [m^3]との積を用いて Q [$\text{Pa m}^3 \text{s}^{-1}$]で表される。気体の状態方程式 $pV = NkT$ から、 $T = 300 \text{ K}$ における $Q = 1 \text{ Pa m}^3 \text{s}^{-1}$ の流量が毎秒何個の分子数の通過に相当するか計算せよ。ここで N ：気体分子の数、 k ：ボルツマン定数 [J K^{-1}]、 T ：気体の絶対温度 [K]であり、 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ とする。
2. 図1.1のように容器1と容器2がパイプで繋がれた真空容器がある。容器2には真空容器内の気体を容器外へ排出する真空ポンプが取り付けられている。容器1と容器2の圧力をそれぞれ p_1 [Pa]、 p_2 [Pa] ($p_2 < p_1$)、容器1から容器2へ流れる正味の流量を Q [$\text{Pa m}^3 \text{s}^{-1}$]とする。流量 Q は繋がれた2つの容器の圧力差に比例する。

$$Q = C(p_1 - p_2) \quad (1)$$

比例定数 C [$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$]はこのパイプのコンダクタンスと呼ばれ、パイプ内の気体の流れやすさの指標となる。真空工学におけるコンダクタンスは電気回路におけるコンダクタンスと同じ合成則が近似的に成り立つことが多く、また実用上でもこの合成則により真空容器のコンダクタンスを計算することが多い。この合成則が成り立つとき、コンダクタンス C [$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$]のパイプを2本直列(図1.2)および並列(図1.3)に繋がったときのコンダクタンスを、 C [$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$]を用いてそれぞれ表せ。

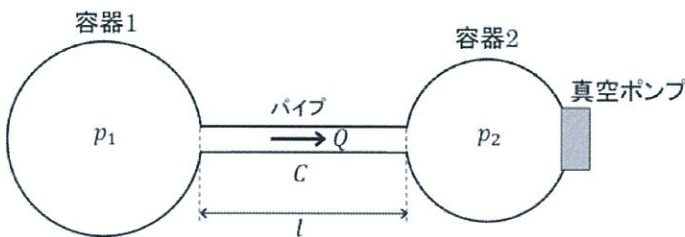


図 1.1

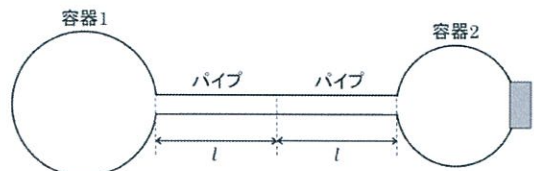


図 1.2

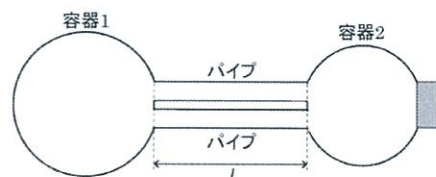


図 1.3

【問 2】

断面の形状が一様なパイプの内壁から気体放出があるときの圧力分布について考える．このパイプの長さは L [m]で，単位長さのコンダクタンスを C_L [$\text{m}^3 \text{s}^{-1} \text{m}$]，パイプ全体のコンダクタンスを C_L/L [$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$]とする．図 2 にあるように，長さ方向に座標 x [m]をとり，圧力を $p(x)$ [Pa] とする． $x = 0, L$ にはそれぞれ同じ性能の真空ポンプを一台ずつ取り付ける．パイプ内壁から真空容器内側へ放出される単位長さあたりの気体の量を $0 \leq x \leq L$ では $q(x) = q$ (一定) [$\text{Pa m}^3 \text{s}^{-1} \text{m}^{-1}$]，それ以外の範囲では $q(x) = 0$ とする．また， x 軸に垂直な断面を通る気体の正味の流量を $Q(x)$ [$\text{Pa m}^3 \text{s}^{-1}$]とする．

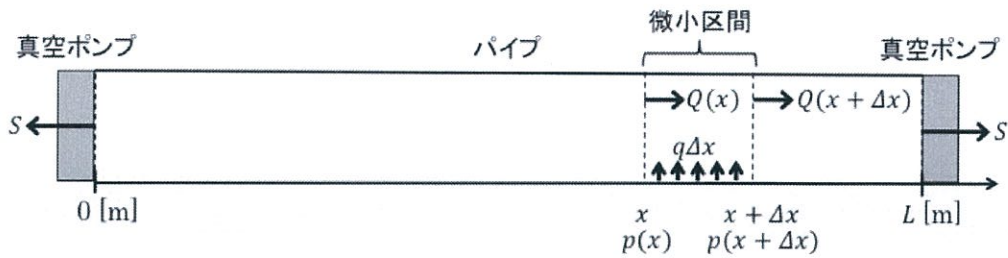


図 2

1. パイプ内の圧力分布を与える微分方程式は次式で与えられる．

$$\frac{d^2 p(x)}{dx^2} = -\frac{q}{C_L} \quad (2)$$

真空ポンプの排気能力（排気速度）は単位時間あたりに容器から排出する気体の体積で表される． $x = 0, L$ に取り付けた真空ポンプの排気速度が S [$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$]のとき，パイプ端部での圧力は次式で与えられる．

$$p(0) = p(L) = \frac{qL}{2S} \quad (3)$$

このとき式(2)の解を求め， $0 \leq x \leq L$ におけるパイプ内の圧力分布を図示せよ．

2. $q = 1.0 \times 10^{-8} \text{ Pa m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$ ， $C_L = 0.1 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ m}$ ， $L = 1 \text{ m}$ の場合，このパイプ全長に渡って圧力を $1.0 \times 10^{-7} \text{ Pa}$ 以下にするためには排気速度 S がいくら以上の真空ポンプを選定すればよいか答えよ．
3. 図 2 に示したパイプの微小区間について考察し，式(2)の微分方程式が成立することを説明せよ．なお，図 2 の微小区間に式(1)を適用できるものとする．