総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

５年一貫制博士課程入学試験問題

数　学

平成２７年８月２６日（水）９時３０分～１１時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること．

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること．

☆ 試験問題（４問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること．

☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第○○問□□枚目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること．

解答できない場合も，受験番号，氏名，問題番号を記入し，提出すること．

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に知らせること．

問題は次頁

第１問

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3i \\ -3 & -i \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ．

【問１】

A^{-1} を求めよ．

【問２】

行列 $A^{\dagger}A$ の２つの固有値と，それぞれに対応する規格化された固有ベクトルを求めよ．ただし，２つの固有ベクトルは，その第１成分を正の実数となるようにせよ．

【問３】

$X^2 = A^{\dagger}A$ となるような行列 X を４つ求めよ．

第２問は次頁

第２問

【問１】

変数変換 $x=\cos^2\theta/\sin^2\theta$, $(0<\theta<\pi/2)$ を用いて，以下の積分を実行せよ．

$$I=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$

【問２】

問１の積分 I を，被積分関数を複素関数に拡張することによって実行する．ただし，$z=re^{i\theta}$, (r と θ は実数，$r\geq 0$，$0\leq\theta<2\pi$) として，$\sqrt{x}(1+x)$ を

$$z^{1/2}(1+z)=\sqrt{r}e^{i\theta/2}(1+z),\quad (0\leq\theta<2\pi)$$

に拡張することにして，図１のような積分路に沿った積分を考察する．それぞれの経路の始点と終点は以下である．

$$\begin{aligned}
&C_1: z=i\epsilon \text{ から } R+i\epsilon,\\
&C_2: z=R+i\epsilon \text{ から } R-i\epsilon,\\
&C_3: z=R-i\epsilon \text{ から } -i\epsilon,\\
&C_4: z=-i\epsilon \text{ から } i\epsilon.
\end{aligned}$$

ここで，ϵ は１より小さい実数，R は１より大きい実数である．以下の問いに答えよ．

(1) 留数定理を用いて，経路 $C_1\to C_2\to C_3\to C_4$ に沿った周回積分を求めよ．

(2) 経路 C_2 と経路 C_4 に沿った積分は，$\epsilon\to 0$ と $R\to\infty$ の極限でそれぞれ０になる．これと問２ (1) の結果を用いて，積分 I を求めよ．

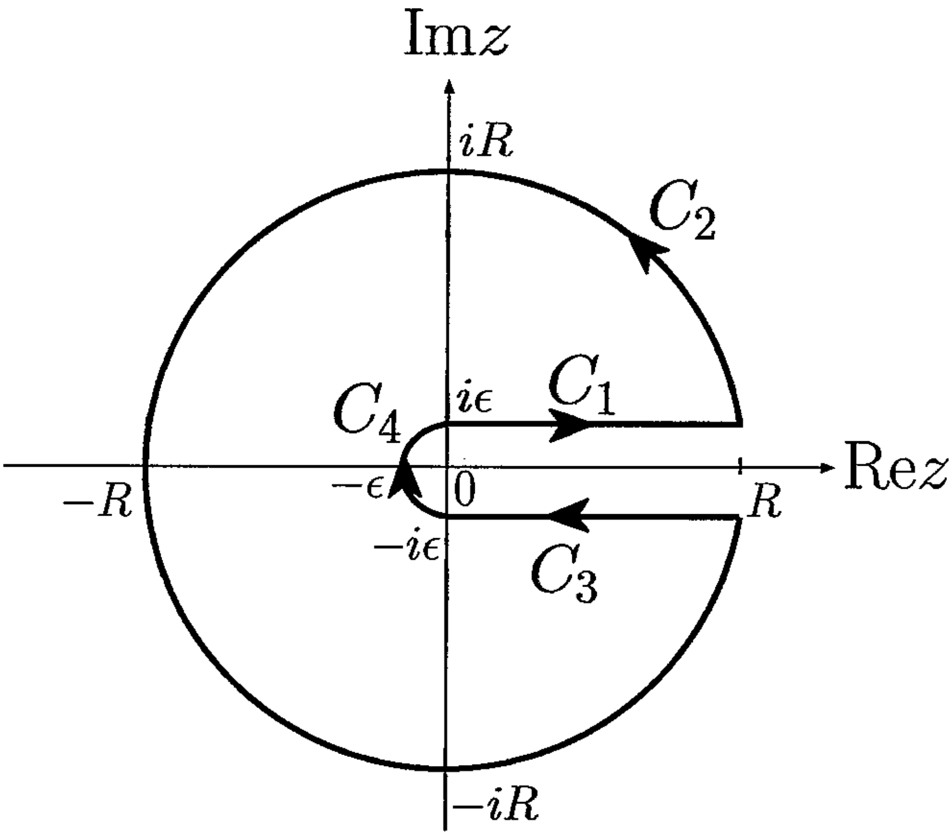

図 1: 積分路

第3問

3次元空間中のベクトル $\mathbf{A}$ が (x, y, z) 座標で以下のように与えられているとする．

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{-y}{r(r+z)}\hat{\mathbf{x}} + \frac{x}{r(r+z)}\hat{\mathbf{y}}\right)$$

ただし，$\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ はそれぞれ x 方向，y 方向の単位ベクトル，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である．$\mathbf{A}$ の定義域を z 軸上の $z \leq 0$ の領域以外とする．以下の問いに答えよ．

【問1】

xy 平面上の半径 a の円 $C : x^2+y^2=a^2$, $z=0$ に沿った周回積分

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

を求めよ．ただし，図2の矢印方向のベクトルの周回積分を正とする．

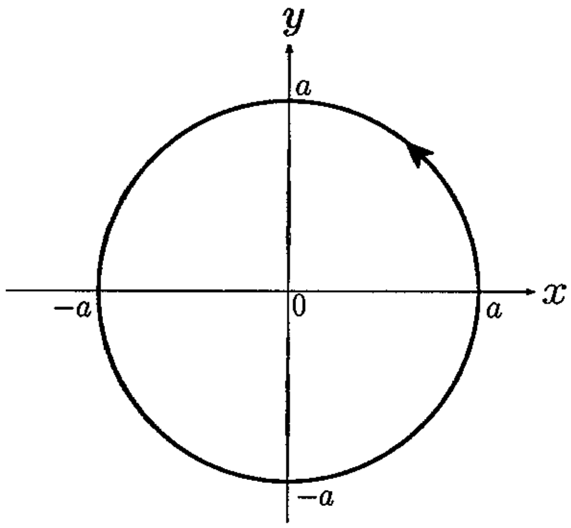

図 2: $x-y$ 座標

【問2】

半径 a の上半球面 $S : x^2+y^2+z^2=a^2$, $z>0$ 上の面積分

$$\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

を求めよ．ただし，球面から外向き（r が大きくなる方向）のベクトルの面積分を正とする．

第４問

以下の積分が存在するとき，関数 $F(s)$ を関数 $f(x)$ のラプラス変換と呼ぶ．

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

以下の問いに答えよ．

【問１】

a を複素数として，

$$f(x) = e^{-ax}$$

のとき，$\mathrm{Re}(s+a) > 0$ の領域で積分を実行して $F(s)$ を求めよ．

【問２】

ラプラス変換が

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

のとき，$f(x)$ を求めよ．ただし，以下の関係式を使って考察せよ．

$$\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right)$$

【問３】

$F(s)$ が存在するとき，導関数 $f'(x)$ のラプラス変換が

$$-f(0) + sF(s)$$

で与えられることを示せ．

【問４】

$f(0) = 0$ のとき，以下の微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$f'(x) - f(x) = e^{-x}$$