総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

５年一貫制博士課程入学試験問題

専門科目

平成２６年８月２７日（水）１３時００分～１６時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること．

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること．

☆ ６問の中から，４問を選んで解答せよ．

ただし、素粒子原子核専攻理論部門を志望する（志望順位を問わず）受験者は第１問及び第２問を必ず選択しなければならない．

☆ 試験問題（４問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること．

☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第○○問□□枚目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること．解答できない場合も，受験番号，氏名，問題番号を記入し，提出すること．

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に知らせること．

問題は次頁

第１問

２次元平面内の領域 Ω に閉じ込められた，質量 m，エネルギー E の質点の量子力学的な運動を考える．ただし，$\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割ったものである．

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y)+V(x,y)\psi(x,y)=E\psi(x,y)$$

$$V(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)\in\Omega\\ \infty & (x,y)\notin\Omega\end{cases}$$

【問１】

$\Omega=\Omega_1=\left\{(x,y)\middle|-\frac{L}{2}<y<\frac{L}{2}\right\}$ （図１）のとき

(1) $\psi(x,y)=X(x)Y(y)$ とおいて，$X(x)$，$Y(y)$ の満たす方程式をそれぞれ求めよ．

(2) すべての固有状態のエネルギー固有値 E と固有関数を求めよ．ただし，固有関数を規格化する必要はない．

【問２】

$\Omega=\Omega_2=\left\{(x,y)\middle|\sqrt{x^2+y^2}<L\right\}$ （図２）のとき

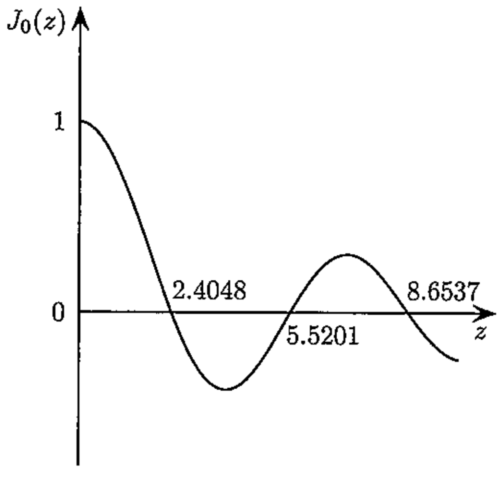
(1) 不確定性原理の観点から考えて，基底状態のエネルギーは，問１の基底状態のエネルギーに比べて高いと予想されるか，あるいは低いと予想されるか，簡単に理由も述べよ．

(2) 極座標 $(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta)$ 表示において，シュレディンガー方程式が以下のようになることを示せ．

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\psi(r,\theta)+V(r)\psi(r,\theta)=E\psi(r,\theta)$$

(3) （円対称な）基底状態のエネルギー固有値 E と固有関数を求めよ．ただし，以下の性質を持つ０次のベッセル関数 J_0（参考図）を用いてよい．

$$z^2\frac{d^2J_0(z)}{dz^2}+z\frac{dJ_0(z)}{dz}+z^2J_0(z)=0$$



参考図

【問3】

$\Omega = \Omega_3 = \Omega_1 \cup \Omega_2$ （図3）のとき

(1) 問1と同じ連続的エネルギー固有値をもつ散乱状態が存在する．この散乱状態のほかに，問2の基底状態より低いエネルギー固有値をもつ状態が存在することを変分原理を用いて示せ．

(2) このような局在した固有状態が存在する理由を物理的に説明せよ．

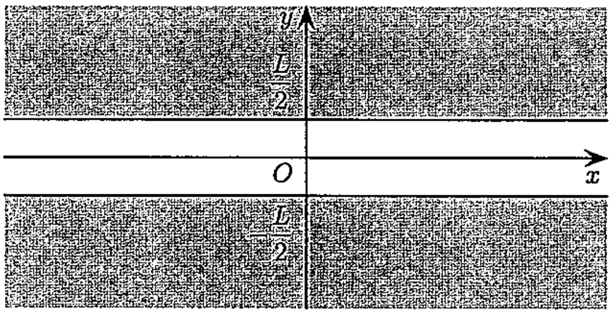


図 1: Ω_1

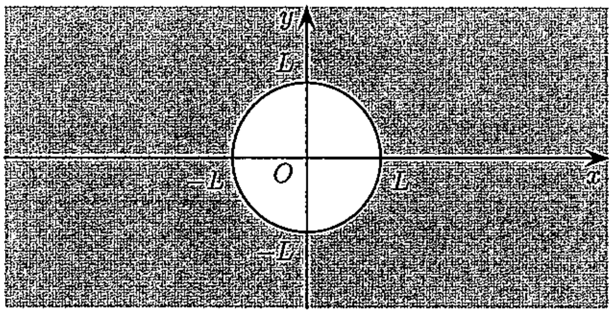


図 2: Ω_2

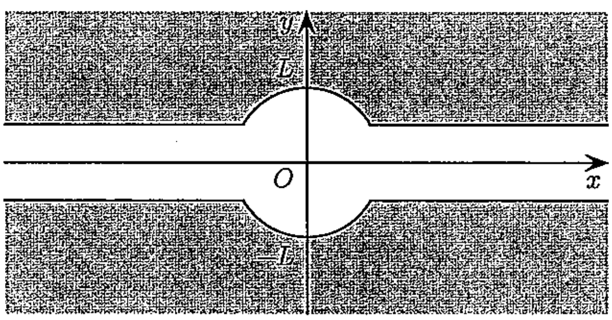


図 3: Ω_3

第２問

一辺が L の立方体の箱の中の電磁場の系を量子論的に考える．電磁場は箱の境界において周期的境界条件を満たし，系全体が温度 T の熱浴中にあるものとする．プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とし，光速を c とする．

【問１】

電磁場を量子論的に扱うと，光子の集まりと見なすことができる．立方体の辺に沿って x 軸，y 軸，z 軸をとるとすると，光子のもちうる運動量 $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ は，n_x, n_y, n_z を任意の整数として

$$p_x = \frac{2\pi\hbar}{L}n_x\ , \quad p_y = \frac{2\pi\hbar}{L}n_y\ , \quad p_z = \frac{2\pi\hbar}{L}n_z \tag{1}$$

と書けることを説明せよ．

【問２】

運動量 $\mathbf{p}$ をもつ光子１個のもつエネルギー $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ は，$\mathbf{p}$ を用いてどのように表されるか．その表式を求めよ．ただし，エネルギーのゼロ点は，$\mathbf{p} = 0$ のときに $\varepsilon_{\mathbf{p}} = 0$ となるようにとるものとする．

【問３】

光子の偏光は一般に，右円偏光 $(\sigma = 1)$ と左円偏光 $(\sigma = 2)$ の重ね合わせの状態で表される．運動量 $\mathbf{p}$ と偏光 σ をもった光子の数を $N_{\mathbf{p},\sigma}$ とすると，系全体のエネルギー E は $N_{\mathbf{p},\sigma}$ と $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ を用いてどのように表されるか．その表式を求めよ．

【問４】

この系の分配関数は，上で求めた E を用いて

$$Z = \sum_{\{N_{\mathbf{p},\sigma}\}} \mathrm{e}^{-\beta E} \tag{2}$$

と表される．ここで $\beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$ であり，k_{B} はボルツマン定数である．また $N_{\mathbf{p},\sigma}$ は，$\mathbf{p}$ と σ ごとに非負のあらゆる整数値をとり，式 (2) における $\sum$ は，それらすべての場合について和をとることを表す．この和を実行することにより，分配関数が

$$Z = \prod_{\mathbf{p}} \left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}}} \right)^2 \tag{3}$$

と書けることを示せ．ただし，式 (3) における $\prod$ は，式 (1) を満たすすべての $\mathbf{p}$ に関して積をとることを表す．

【問５】

系のエネルギーは，分配関数 Z を用いて

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \tag{4}$$

で与えられる．これに式 (3) を代入することにより，式 (1) を満たすすべての $\mathbf{p}$ に関する和の形に表せ．また，この和を積分に置き換える近似を用いて，$p = |\mathbf{p}|$ に関する積分の形に書き換えよ．

【問６】

上の積分を実行して，単位体積あたりのエネルギー $\frac{E}{L^3}$ を温度 T の関数として求めよ．ただし，

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}dx = \frac{\pi^4}{15} \tag{5}$$

を用いてよい．

第３問

【問１】

調和振動子（例えばバネについた重り）の微小振動を考える．振動子の質量をm，ばね定数を$k>0$とする．振動子にはたらく力はバネによる線形の復元力だけであるとし，摩擦力や重力は無視する．時刻をt，そのときの振動子の位置を$x(t)$，時間微分をダッシュ（プライム）記号で表すことにする．

(1) 振動子の運動方程式と解，基本角振動数ω_0を求めよ．ただし$x(0)=A$，$x'(0)=0$とする．

(2) 振動子の運動エネルギーTとポテンシャルエネルギーUを，振動子の位置xと運動量$p\equiv mx'$を使って書け．また，系のハミルトニアン$H_0(x,p)=T(x,p)+U(x,p)$を求めよ．kのかわりにω_0を使って表記すること．

(3) 正準変換によって，振動子の運動を(x,p)でなく，新しい変数(θ,J)を使って表現したい．正準変換の母関数を，

$$F(x,\theta)=-\frac{m\omega_0}{2}x^2\tan\theta$$

とすると，各変数間の関係は$dF=pdx-Jd\theta$より，

$$p=\frac{\partial F}{\partial x},\quad J=-\frac{\partial F}{\partial\theta}$$

となる．もとの変数xとp，系のハミルトニアンH_0を新しい変数θ，Jを使って表すと，

$$x=\sqrt{\frac{2J}{m\omega_0}}\cos\theta,\quad p=-\sqrt{2Jm\omega_0}\sin\theta,\quad H_0=J\omega_0$$

となることを示せ．

(4) ハミルトンの運動方程式

$$J'=-\frac{\partial H_0}{\partial\theta},\quad \theta'=\frac{\partial H_0}{\partial J}$$

を解け．初期条件は(1)と同じとする．

（問２は次ページ．）

【問２】

問１のバネに，わずかな非線形性がある場合を考える．

(1)　系にポテンシャルの歪み

$$\Delta U=\frac{1}{4}\varepsilon x^4$$

を導入する．ただし，$\varepsilon>0$とする．歪んだポテンシャル$U+\Delta U$に対する運動方程式を求めよ．(このような運動方程式をダフィング方程式といい，非線形振動の分野ではよく知られたものである.)

(2)　振動子の振動の振幅が徐々に大きくなっていく可能性があるか，それとも一定の領域内を安定に振動し続けるか，ポテンシャルの形状から考えよ．

(3)　バネの非線形性を考慮に入れたハミルトニアン$H=T+U+\Delta U$を，問１の(3)の変数θとJとを使った形に書き直すと，

$$H=J\omega_0+\varepsilon\frac{J^2}{m^2{\omega_0}^2}\cos^4\theta$$

となることを示せ．以下，これを$H=H_0+\varepsilon V$と書くことにする．

(4)　非線形性が小さい，すなわちεの大きさが十分に小さい場合，ハミルトニアンにおけるεVの効果は振動子の振動周期で平均して扱うことがよい近似となる．

$$\langle\varepsilon V\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon V d\theta$$

を具体的に求め，近似したハミルトニアンと運動方程式から系の角振動数$\omega=\theta'$を求めよ．ただし，

$$\cos^4\varphi=\frac{1}{8}(3+4\cos 2\varphi+\cos 4\varphi)$$

を使ってよい．

第4問

【問1】

実験室系で真空中を速さ v で z 軸方向に飛行する陽子ビームを考える．陽子ビームの形状は図1に示すように円柱座標系の z 軸を中心とした半径 R の円柱状で，電荷分布は一様とする．ビームの長さは半径 R に対して十分長く，無限に長いと仮定してよい．電荷密度を ρ とするとき以下の設問に答えよ．陽子の電荷は e，真空の誘電率，透磁率をそれぞれ ϵ_0，μ_0 とする．単位系はSI単位系とすること．

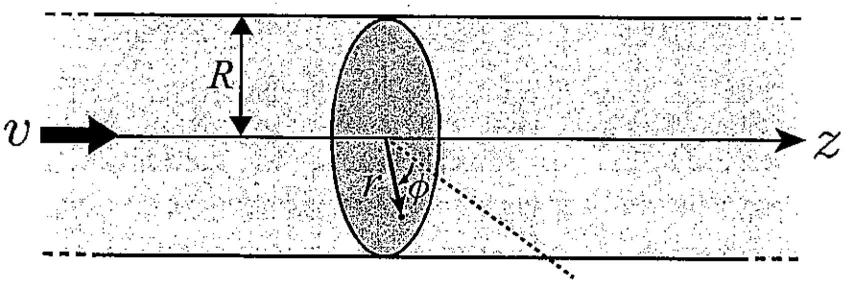


図 1: 真空中を飛行する陽子ビーム．

(1) z 軸から距離 r の点における電場を求め，図示せよ．

(2) 陽子ビームの電流が 10 mA，陽子の速さが光速の50%，ビームの半径が 5 mm のとき，ビーム表面とビーム中心の電位差を求めよ．真空の誘電率 ϵ_0，真空の透磁率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2 と光速 $c = 3 \times 10^8$ m/s の関係は $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ である．

(3) 軸から距離 r の位置での ϕ 方向の磁束密度 $B_\phi(r)$ が，$r < R$ のとき

$$B_\phi(r) = \frac{\mu_0 \rho v r}{2}$$

となることを示せ．

下記のアンペールの法則を用いてもよい．

閉曲線 C に沿った磁束密度 B の接線成分の積分と閉曲線 C によってかこまれる曲面を通り抜ける電流の総和 I の関係

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 I$$

(4)　$r < R$ で，軸から距離 r の位置にある陽子にはたらく動径方向の力が

$$F_r(r) = \frac{e\rho}{2\epsilon_0\gamma^2} r$$

となることを示せ．ここで γ はローレンツ因子（$\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$）である．

この結果から同じ向き進む荷電粒子ビームの場合，ビームが $\gamma \gg 1$ の相対論的な速さまで加速されるとビーム自身による発散力は急激に弱くなることがわかる．

【問２】

(1)　図２に示す z 軸を中心とした半径 R の円環を流れる電流が作る磁場を考える．$z = 0$ におかれた円環に z 軸のまわりを時計回りに電流 I が流れるとき，軸上の z 方向の磁束密度が

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

となることを示せ．
下記の閉回路にビオ・サバールの法則を適用した式を用いてもよい．

閉回路 C を流れる定常電流 I が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は閉回路上の位置 $\boldsymbol{r}'$ を用いると

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C (I d\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

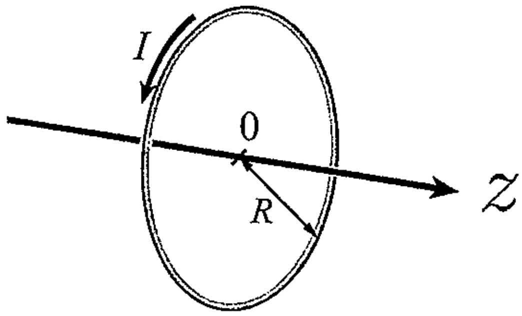


図 2: $z = 0$ におかれた円環．

(2) 図 3 のように $z=-\ell/2$，$z=\ell/2$ に半径 R，巻き数 N の 2 つのコイルをおき，それぞれ z 軸に対して時計回りに電流 I を流す．z 軸上の磁場は $\ell=R$ のとき，z の 3 次の項まで考慮した場合，$z=0$ のまわりで一定となることを示せ．コイルの厚さおよびコイルまでの電流の経路は無視せよ．

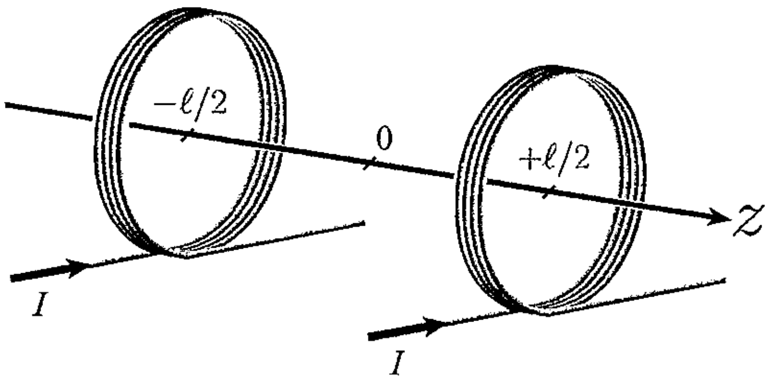


図 3: $z=-\ell/2$，$+\ell/2$ におかれた 2 つのコイル．

第５問は次頁

第５問

宇宙空間に，静止している電荷を持たない粒子(中性粒子)が存在しているとする．中性粒子に対して検出器を等速運動させる（図１参照）と，検出器を構成する物質中の原子核が中性粒子によって弾性散乱されることが期待される．この弾性散乱に伴う原子核の反跳エネルギーを測定することにより，中性粒子の検出を試みる．以下の計算を行う際には，有効数字２桁，端数処理は切り捨てとする．

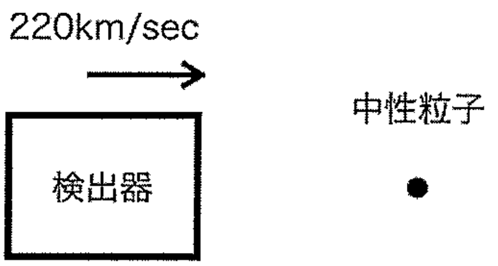


図１：検出対象と検出器

【問 1】検出信号強度の計算

(1)　中性粒子の質量は 1.9×10^{-25} kg，検出器の速度は 220 km/s であるとして，検出器の静止系における中性粒子の運動エネルギーを計算せよ．単位は eV で示せ．なお 1 eV $= 1.6\times10^{-19}$　J とする．

(2)　検出器として半導体検出器を使用することにし，その信号強度を求める．(1)で計算したエネルギーが，全て検出器中の正孔-電子対の生成に使用されたとする．一つの正孔-電子対を生成し，かつ電場中で運動させることができるようにするために必要なエネルギーは 3.5 eV として，この半導体検出器中で生成される正孔-電子対の数を計算せよ．

【問２】検出器構造の検討

この正孔-電子対を電気信号として検出するために，検出器の電極配置を検討する．図２に断面を示す通り，半導体を無限平行平板電極で挟み込み，電極間に$-\phi$ [V]の電圧をかける．生成された正孔-電子対は，印加された外部電場により引き離され移動する．

(1)　図２に示すとおり，電極１と電極２から等距離の位置（A 点）に，電極１，２と平行な無限長の導線を配置し，$-\phi/2$ [V]の電圧を供給する電池につないだ．このとき，一個の電子が電極１を出発点とし電極２に到達する間に，配置された信号検出電極に誘導された電荷（電流の積分値）を算出し，電子の個数で示せ．素電荷を 1.6×10^{-19} C とする．この電子は，電極１と電極２の間の電場を乱さないと仮定してよい．

(2)　A 点におかれた導線の代わりに，電極２で信号を検出することにする．(1) 同様，

一個の電子が電極１を出発点とし電極２に到達する間に，電極２に誘導された電荷を算出し電子の個数で示せ.

(3) 電極１と２から等距離の位置に，問１の２で求めた量の正孔-電子対が生成され，電子と正孔が電場により移動し電極に到達したとき，電極２に誘導された電荷を算出し電子の個数で示せ.

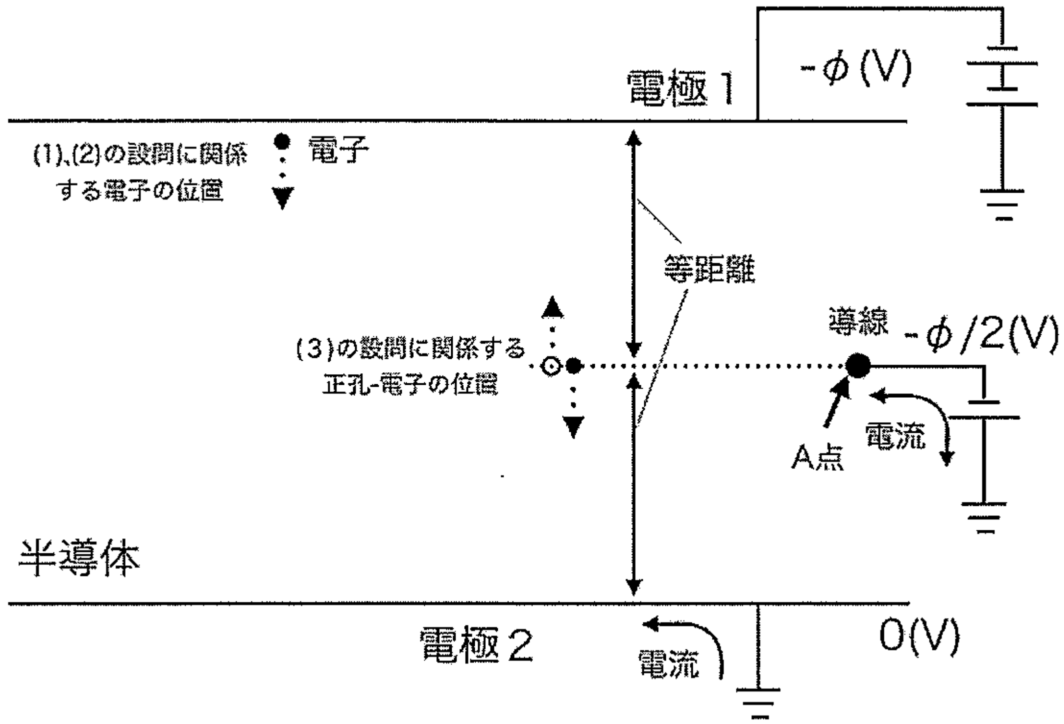


図２：検出器と信号検出電極

【問 3】検出感度の検討

電極２に信号処理システムを接続する際，検出器及び信号処理回路が発生する雑音は，検出感度を決定する一因となる．この雑音を評価するために，図３に示す無雑音信号処理システムを想定し，無雑音信号処理システムの入力における雑音（入力等価雑音電子数:ENC）を計算する．ENC の２乗は下記の式に従う．

$$ENC^2 = \frac{Ci^2 V_n{}^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \omega^2 d\omega$$

ここで $V_n{}^2$ は単位周波数あたりの電圧雑音の２乗値で，かつ周波数に依存しない定数，Ci は電極２（信号検出電極）からみた検出器の静電容量である．角周波数 ω を変数として H(ω) は無雑音信号処理システムの伝達関数である．

(1) 伝達関数が $e\tau/(1+j\omega\tau)$ であるとき（この伝達関数は抵抗とコンデンサで構成される積分回路で実現できる.），ENC はどうなるか．j は虚数単位，τ はシステムを特徴づ

ける時定数，eは定数2.7とする．

(2) 伝達関数が $e\tau/(1+j\omega\tau)^2$ であるとき，ENC を計算せよ．このとき次の関係式を使用してよい．

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

(3) $\tau=1$ μs及び V_n=10 nV/(Hz)$^{1/2}$ を仮定し，ENCを問1の(2)で求めた電子の個数の1/10以下にしたい．この条件を満たすCiの上限値を計算せよ．

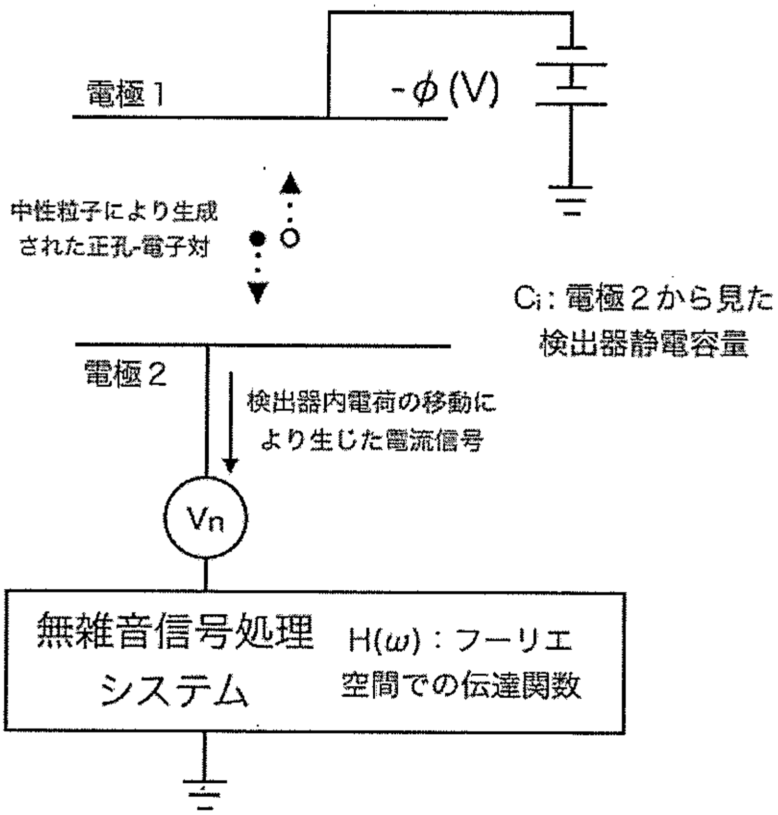


図3：検出器と信号を読み出すための信号処理システム

第６問は次頁

第 6 問

加速器はさまざまな装置の組み合わせで構築される．これらの装置を設計するとき，定量的に見積もる必要のある事柄のいくつかを実際に計算してみよう．以下の問いに答えよ．

【問 1】

電子を真空中に取り出す方法の一つに光電効果を利用したものがあり，図 1 はその模式図である．計算結果は有効数字 2 桁で求めよ．

(1) 物体の表面を光電面とし，その素材の仕事関数が 3.0 eV のとき，電子を取り出すのに必要な光の波長は何 m 以下か．

量子効率（Quantum Efficiency: $Q.E. = N_e / N_p$, N_e：取り出された電子数，N_p：入射光子数）は，一般に光の波長に対し依存性をもつ．光電面に照射する光の波長が 300 nm（3.0×10^{-7} m），その波長に対する量子効率を 1.0×10^{-2} とする．この条件で図 1 の物体の表面から 1.6 nA の電流を取り出す．

(2) 光電面に入射した光の強度（パワー）[W]を求めよ．

ここで，必要ならば h：プランク定数 6.6×10^{-34} J s，　c：光速 3.0×10^{8} m/s，
e：電気素量　1.6×10^{-19} C を用いよ．

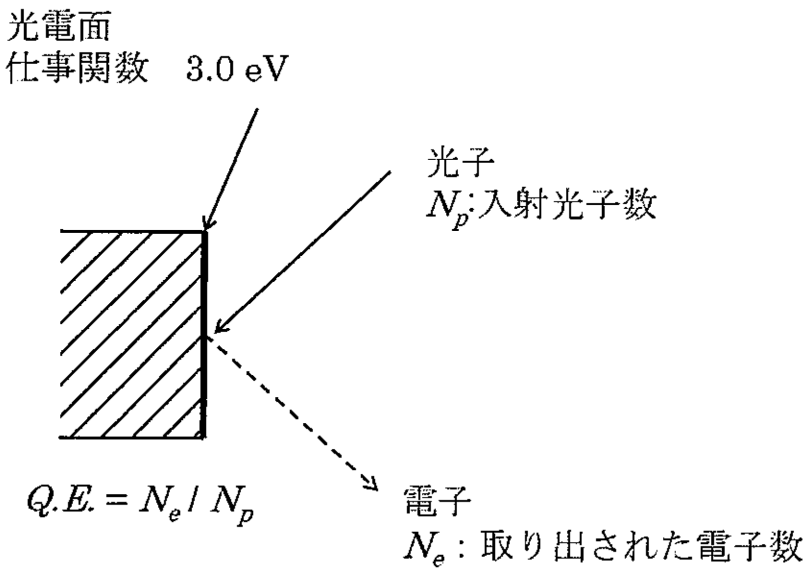


図 1　光電効果の模式図

【問 2】

速度 v で運動する電子が電磁場中を通過する場合，電子はローレンツ力を受け，その軌道が変化する．一般に電磁場中を通過する荷電粒子にはたらくローレンツ力は次の式で表すことができる．

$$F = q(E + v \times B)$$

ここで F: ローレンツ力 [kg m/s^2]，q: 電荷量 [C]，E: 電界強度 [V/m]，v: 荷電粒子の速度 [m/s]，B: 磁束密度 [T] である．

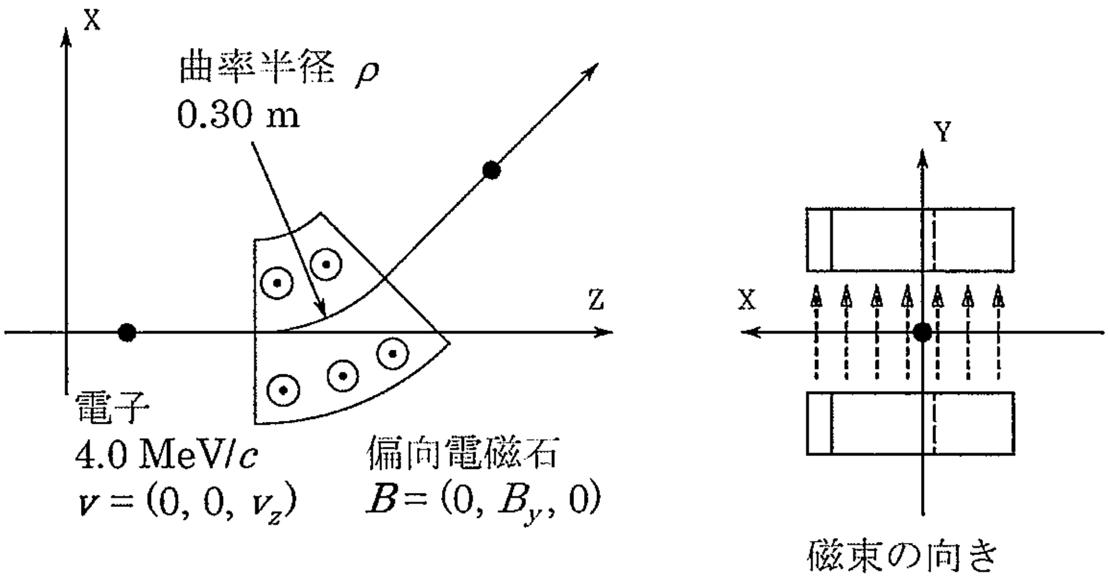


図 2　電子の進行方向と偏向電磁石

図 2 は一様磁場 $B =$ (0, B_y, 0) をもつ偏向電磁石へ入射された電子の軌道の変化を図示したものである．

(1) 図 2 にある偏向電磁石内に入射された電子はローレンツ力と遠心力のつり合いから曲率半径 ρ の等速円運動をする．電子の電荷量を $-e$，入射速度 $v = (0, 0, v_z)$，運動している電子の質量を m とし，曲率半径 ρ を用いて電子の運動量の大きさを求める式を導け．ここで，角速度 ω により遠心力 $F_c = m\rho\omega^2$ と表せることを用いてもよい．

(2) 4.0 MeV/c の運動量をもつ電子が偏向電磁石内に入射したとき，図 2 に示すような曲率半径 0.30 m の軌道を通過させたい．必要な磁束密度 B_y [T] を有効数字 2 桁で求めよ．

ここで運動量の単位は一般に [kg m/s]であるが，eV を用いた単位系 [MeV/c]に書き直せる．問題を解くときに以下の関係を用いてもよい．

$$1\ \text{MeV}/c = 5.3 \times 10^{-22}\ \text{kg m/s}$$