# 総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

# ５年一貫制博士課程入学試験問題

# 数　学

平成２６年８月２７日（水）９時３０分～１１時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に，受験番号，氏名を記入すること．

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること．

☆ 試験問題（３問）ごとに，異なった答案用紙を使用すること．

☆ 各問題に対して，答案用紙は複数使用してよいが，第○○問□□枚目というように，所定の欄に，選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること．

解答できない場合も，受験番号，氏名，問題番号を記入し，提出すること．

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は，挙手をして監督者に知らせること．

問題は次頁

**第1問**

4次元実ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ に対して，複素 $2 \times 2$ 行列 $M(\boldsymbol{v})$ を

$$M(\boldsymbol{v}) = v_0 I + \sum_{a=1}^{3} v_a \sigma_a,$$

と定義する．ここで $I$ は $2 \times 2$ の恒等行列，$\sigma_a$ $(a = 1, 2, 3)$ はパウリ行列:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

である．

**【問1】**

行列 $\Lambda_1 = \exp(\omega\sigma_1)$ および $\Lambda_2 = \exp(i\theta\sigma_1)$ の各成分を求めよ．($\omega$, $\theta$ は実数)

**【問2】**

【問1】で求めた $\Lambda_1$ に対して，$M(\boldsymbol{v}') = \Lambda_1 M(\boldsymbol{v}) \Lambda_1^\dagger$ により新たなベクトル $\boldsymbol{v}'$ を定義する．このとき $\boldsymbol{v}' = U_{\Lambda_1} \boldsymbol{v}$ を満たす $4 \times 4$ 行列 $U_{\Lambda_1}$ を求めよ．($\Lambda_1^\dagger$ は $\Lambda_1$ のエルミート共役)

**【問3】**

【問1】で求めた $\Lambda_2$ に対して，【問2】と同様に $M(\boldsymbol{v}'') = \Lambda_2 M(\boldsymbol{v}) \Lambda_2^\dagger$，$\boldsymbol{v}'' = U_{\Lambda_2} \boldsymbol{v}$ を満たす $4 \times 4$ 行列 $U_{\Lambda_2}$ を求めよ．

## 第２問

次の２つの積分を計算することを考える．

$$I_C = \int_0^\infty dx\, e^{-x} \cos(x \tan\theta),$$
$$I_S = \int_0^\infty dx\, e^{-x} \sin(x \tan\theta).$$

そのために，複素関数 $e^{-z}$ を下図のような半径 $R$，中心角 $\theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ の扇形の周囲に沿って積分することを考える．積分経路は次の３つに分けられる．

$$C_1 = \{z = x | 0 \le x \le R\},$$
$$C_2 = \{z = Re^{i\varphi} | 0 \le \varphi \le \theta\},$$
$$C_3 = \{z = re^{i\theta} | 0 \le r \le R\}.$$

**【問１】**

$\int_{C_1} dz\, e^{-z}$ を求めよ．

**【問２】**

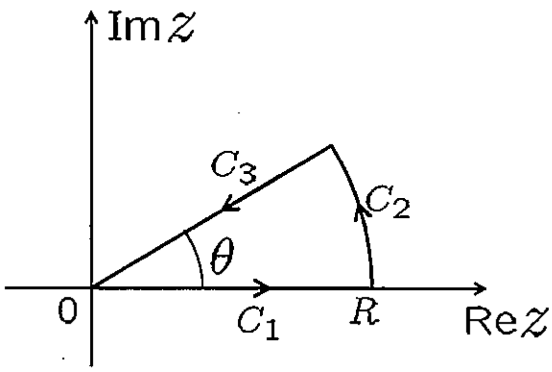
不等式 $\left|\int_0^\theta d\varphi\, f(\varphi)\right| \le \int_0^\theta d\varphi\, |f(\varphi)|$ および $\cos\theta \le \cos\varphi$ を用いて $\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} dz\, e^{-z} = 0$ を示せ．

**【問３】**

$\lim_{R\to\infty} \int_{C_3} dz\, e^{-z}$ を $I_C$ と $I_S$ を用いて表せ．

**【問４】**

$I_C$ および $I_S$ を求めよ．



## 第3問

2階線形微分方程式:

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2}+p(t)\frac{df(t)}{dt}+q(t)f(t)=0 \qquad (p(t),\, q(t)\text{ は任意の関数})$$

の恒等的にゼロでない2つの解 $f_1(t)$, $f_2(t)$ を考える.

**【問1】**

$W(t)$ を $W(t)=f_1(t)\dfrac{df_2(t)}{dt}-\dfrac{df_1(t)}{dt}f_2(t)$ で定義される関数とする. このとき,

$$W(t)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}dt'\,p(t')\right\} \qquad (t_0:\text{定数})$$

は $t$ に依存しないことを示せ.

**【問2】**

【問1】の結果より, $W(t_0)=0$ ならば $W(t)$ は恒等的にゼロである. このとき $f_1(t)$ は $f_2(t)$ に比例する (すなわちある定数 $C$ に対して $f_1(t)=Cf_2(t)$ が成り立つ) ことを示せ.

**【問3】**

第1種 Bessel 関数 $J_\nu(t)$ ($\nu$ は実数) は微分方程式:

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{df(t)}{dt}+\left(1-\frac{\nu^2}{t^2}\right)f(t)=0$$

の解であり, $|t|$ が十分大きいところでは

$$J_\nu(t)\overset{|t|\to\infty}{\longrightarrow}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos\left(t-\frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right)$$

のように振舞う. 【問1】の結果を用いて, $J_\nu(t)\dfrac{dJ_{-\nu}(t)}{dt}-\dfrac{dJ_\nu(t)}{dt}J_{-\nu}(t)$ を求めよ.

**【問4】**

$J_\nu(t)$ が $J_{-\nu}(t)$ に比例しないための条件を求めよ.