総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

５年一貫制博士課程入学試験問題

数　学

平成２５年９月３日（火）９時３０分～１１時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること。

☆ 試験問題（４問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第○○問□□枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること。

解答できない場合も、受験番号、氏名、問題番号を記入し、提出すること。

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に知らせること。

第１問

【問１】

関数 $f(x) = \tan x$ を $x = 0$ のまわりで x^3 のオーダーまでテイラー展開せよ.

【問２】

実数 a の関数 $I(a) = \int_0^\infty dx\, e^{-x^2} \cos(2ax)$ は，微分方程式

$$\frac{dI}{da} = -2aI$$

を満たすことを示せ．また，この微分方程式を解くことで，$I(a)$ を求めよ．ただし，$\int_0^\infty dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}/2$ を用いてよい.

【問3】

ε を $0 < \varepsilon \leq 1$ を満たす定数，n を自然数とするとき，積分

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{e^{i\theta} - (1 - \varepsilon)}$$

を求めよ．$z = e^{i\theta}$ と変数変換し，留数定理を用いるとよい.

第 2 問

【問１】

関数系 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は区間 $[-\pi, +\pi]$ で完全直交系をなすことを示せ.

【問 2】

ある関数 $f(x)$ のフーリエ展開を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と書こう．このとき，関係式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dx\ \{f(x)\}^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

が成り立つことを示せ.

【問３】

偶関数 $f(x) = |x|$ のフーリエ展開を求め，それを用いて，無限級数

$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots$$

を示せ.

第３問

パウリ行列 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は，反交換関係および交換関係

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\ , \qquad \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

を満たす．ただし， ε_{ijk} は $\varepsilon_{123} = 1$ となる完全反対称テンソルである．以下の問いに答えよ．

【問 1】

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

を示せ．ただし，$\mathbf{a}$ および $\mathbf{b}$ は３次元ベクトルであり，“・”はそれらの内積，“×”は外積を表す．

【問 2】
$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ を単位ベクトル，θ を実数とするとき，

$$\exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\theta\right) = I\cos\frac{\theta}{2} - i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\sin\frac{\theta}{2}$$

を示せ．ただし，I は単位行列である．

【問 3】
行列 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$ の固有値を求め、$\mathbf{n} = (1,0,0)$のときの固有ベクトルを求めよ．

第４問

単位時間にある事象が n 回起こる確率が，確率分布

$$f(n;\nu)=\frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}$$

に従っていたとする．ここで ν はある実数である．このとき，以下の問いに答えよ．

【問 1】

$f(n;\nu)$ が確率分布としての条件を満たしていること，つまり起こりうるすべての事象の確率の合計は１になることを示せ．

【問 2】

事象が起こる回数の平均値および分散を求めよ．

【問 3】

ν が１よりも十分大きい極限を考えよう．このとき，$|n-\nu|\ll\nu$ となるような n に対しては，確率分布が $\exp\left(-\frac{(n-\nu)^2}{2\nu}\right)$ に比例することを示せ．ただし，近似式 $n!\cong n\ln n-n$ を使ってもよい．

〇出題ミスについて

第４問【問３】に出題ミスがありました。

ミスの箇所・内容は次のとおりです。

（誤）・・・ただし，近似式　$n!\cong n\ln n-n$　を使ってもよい．

（正）・・・ただし，近似式　$\ln n!\cong n\ln n-n$　を使ってもよい．