総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

５年一貫制博士課程入学試験問題

数　学

平成２４年８月２９日（水）９時３０分～１１時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること。

☆ 試験問題（３問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第○○問□□枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること。

解答できない場合も、受験番号、氏名、問題番号を記入し、提出すること。

☆ 答案用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に知らせること。

第1問

恒等的にはゼロでない複素解析関数 $f(z)$ が，任意の複素数 $z_1, z_2 \neq 0$ に対して関係式

$$f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2)$$

を満たすとする.

【問1】

$f(1) = 1$ となることを示せ.

【問2】

$f'(1) = a$ とおくとき，$f(z)$ が微分方程式

$$z f'(z) = a f(z)$$

を満たすこと示せ.

【問3】

$z \neq 0$ で一価正則となる $f(z)$ をすべて求めよ.

第2問

複素平面 z 上の関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} - 1$$

により定義する．

【問1】

$f(z)$ が z の偶関数であることを示せ．さらに，$f(z)$ は原点 $z=0$ で正則で，次のように Taylor 展開できることを示し，展開係数 B_0, B_1 を具体的に求めよ．

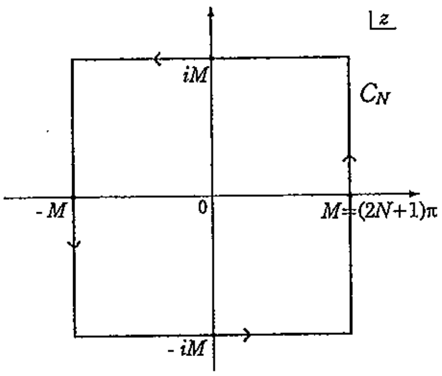
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} z^{2n}$$

【問2】

$f(z)/z^3$ の1位の極とその留数をすべて求めよ．

【問3】

複素平面において，$M = (2N+1)\pi$（N は正整数）として，次の矩形の積分路を C_N とする：



$$C_N = \{z = M(\pm 1 + ti) \mid -1 \le t \le 1\}$$
$$\cup \{z = M(s \pm i) \mid -1 \le s \le 1\}.$$

このとき，C_N に沿った積分 $I_N = \int_{C_N} dz f(z)/z^3$ は $N \to \infty$ でゼロとなる．このことと留数定理を用いて，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

となることを示せ．

【問4】

問3で定義した I_N が $N \to \infty$ で実際にゼロに収束することを示せ．

第3問

【問1】

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は，行列式の値が1ならば次の方程式を満たすことを示せ：

$$A^2 - (a+d)A + I = 0.$$

ここで I は2次の単位行列である．さらに，A の固有値 λ も同じ方程式

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + 1 = 0$$

を満たすことを示せ．

【問2】

問1の行列 A において，$a+d=2$ のとき，任意の自然数 n に対し次の式が成り立つことを示せ．

$$A^n = nA - (n-1)I.$$

【問3】

問1の行列 A ですべての成分 a, b, c, d が整数となるものを考える．A^n の固有値が λ^n となることに注意して，適当な自然数 n に対し $A^n = I$ となるのは，$a+d = 0, \pm 1, \pm 2$ の場合に限られることを示せ．

【問4】

A が問3の条件を満たし適当な自然数 n に対して $A^n = I$ とする．このとき，$1, 2, 3, 4, 6$ のいずれかの自然数 m に対して $A^m = I$ となることを示せ．(A は対角化可能とは限らないことに注意せよ．)