

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究所

5年一貫制博士課程入学試験問題

物 理

平成23年8月30日（火）13時00分～16時00分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙1枚が配布されていることを確認すること。

☆ 7問の中から、4問を選んで解答せよ。

ただし、素粒子原子核専攻理論部門を志望する（志望順位を問わず）受験者は第1問及び第2問を必ず選択しなければならない。

☆ 試験問題（4問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること。解答できない場合も、受験番号、氏名、問題番号を記入し、提出すること。

☆ 解答用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に知らせること。

第 1 問は次頁

第1問

粒子の散乱を考える。簡単のため、3次元中心力ポテンシャル $V(r)$ による質量 m の粒子の散乱を定常状態として扱う。 $V(r)$ は $r \rightarrow \infty$ で $1/r$ より速くゼロになり、 $r \rightarrow 0$ で有限とする。またスピンなどの粒子の内部自由度は無視する。

【問1】定常状態では、エネルギー $E(> 0)$ の粒子の波動関数を

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \quad (1)$$

と表せる。Schrödinger 方程式から固有関数 $\varphi(\mathbf{r})$ の満たす式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)\right] \varphi(\mathbf{r}) = E\varphi(\mathbf{r}) \quad (2)$$

を導け。

【問2】解が遠方 $r \rightarrow \infty$ でどのように振る舞うかを考えよう。入射波が負の z 軸方向から原点に向かって進み散乱される場合、波動関数は入射波 $\varphi_{\text{in}} = e^{ikz}$ と散乱波 $\varphi_{\text{out}} = f(\theta)e^{ikr}/r$ の重ね合わせ

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_{\text{in}} + \varphi_{\text{out}} = e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}, \quad (r \rightarrow \infty) \quad (3)$$

で表される。

(a) この解 (3) が方程式 (2) を満たすことを示し、 k を求めよ。ただし、遠方 $r \rightarrow \infty$ を考えているので、 $1/r$ の最低次だけに注目せよ。[参考：極座標でのラプラシアンは

$$\Delta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 r + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right]$$

(b) 確率の流れ

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2mi} [\varphi^*(\mathbf{r})\nabla\varphi(\mathbf{r}) - \nabla\varphi^*(\mathbf{r}) \cdot \varphi(\mathbf{r})] \quad (4)$$

を考える。入射波 φ_{in} と散乱波 φ_{out} に対して、遠方 $r \rightarrow \infty$ での確率の流れ $\mathbf{j}_{\text{in}}, \mathbf{j}_{\text{out}}$ をそれぞれ求めよ。また、 $\mathbf{j}_{\text{in}} = j_{\text{in}}\mathbf{e}_z$, $\mathbf{j}_{\text{out}} = j_{\text{out}}\mathbf{e}_r$ とすると微分断面積が $\frac{d\sigma}{d\Omega} =$

$$\left. \frac{j_{\text{out}}r^2}{j_{\text{in}}} \right|_{r \rightarrow \infty} \quad \text{となることを用いて}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (5)$$

を示せ。ただし、遠方 $r \rightarrow \infty$ を考えているので、 $1/r$ の最低次だけに注目せよ。[参考：極座標では $\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi}$]

【問3】次に中心 $r \rightarrow 0$ での解の振る舞いを見てみよう. 式 (2) で $\varphi(r)$ を球面調和関数展開 $\varphi(r) = \sum_{\ell m} \frac{\chi_{\ell m}(r)}{r} Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ すると, 動径関数 $\chi_{\ell m}(r)$ の満たす式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \boxed{\text{X}} \right) + V(r) \right] \chi_{\ell m}(r) = E \chi_{\ell m}(r) \quad (6)$$

を得る. これから, 中心で値を持つ解は s 波 ($\ell = 0$) のみであることを示そう.

(a) $\boxed{\text{X}}$ を求めよ. [参考: $\Delta Y_{\ell m}(\theta, \phi) = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} Y_{\ell m}(\theta, \phi)$]

(b) 角運動量 $\ell \neq 0$ をもつ正則な解を, 中心付近 $r \rightarrow 0$ で $\chi_{\ell m}(r) \propto r^n$ と近似したとき, この指数 n を求め, 原点で波動関数が 0 となること $\varphi(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 0$) を示せ.

【問4】これまでの考察の具体例として, 井戸型ポテンシャル $V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$ によって, エネルギー E をもつ平面波が s 波 ($\ell = 0$) へ散乱される問題を考えよう. 以下では $Y_{00} = 1$ と規格化する.

(a) $r < R$ で $\varphi(r)$ が正則な解は, s 波の動径関数 $\chi_0(r) \left[= \chi_{(\ell=0)(m=0)}(r) \right]$ が

$$\chi_0(r) = A \sin(\alpha r), \quad (r < R) \quad (7)$$

となることを示し, α (> 0) を求めよ. ここで A は規格化定数である.

(b) $r > R$ では, s 波の動径関数 $\chi_0(r)$ が, 【問2】(a) で求めた運動量 k を用いて,

$$\chi_0(r) = B \sin(kr) + C \cos(kr), \quad (r > R) \quad (8)$$

となることを示し, 解を接続して B/A , C/A を α , k , R の関数として求めよ.

(c) 式 (3) の s 波成分と解 (8) を比べることで, s 波散乱の微分断面積 $|f(\theta)|^2$ を B/C と k の関数として求めよ. [参考: 平面波 e^{ikz} を球面波で展開したとき, $r \rightarrow \infty$ で角運動量 $\ell = 0$ の成分は $\frac{\sin(kr)}{kr}$ で与えられる.]

(d) 前問 (c) より, s 波の動径関数の係数 B , C が $B - iC = \frac{1}{k}$ を満たすことを示せ. これに 【問4】(b) の結果を代入することで係数 A が求まる. それから, 原点における s 波の波動関数の絶対値の二乗 $P = \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{\chi_0(r)}{r} \right|^2$ を求めよ.

(e) V_0 を 0 でない正の値としたとき, 入射波のエネルギー E と αR がそれぞれどのような条件を満たすときに, 前問で求めた P が発散するかを求めよ. これはゾンマーフェルト増幅とよばれ, 暗黒物質の対消滅過程で考慮されることがある.

第2問

電子は、軌道運動のみならず、スピン $\frac{1}{2}$ による磁気モーメント $\mu = e\hbar/2mc$ を持つため、以下の様な興味深い統計力学的性質を示す。以下の設問すべてにおいて、電子は温度 T のカノニカル分布に従うとする。Boltzmann 定数は $k = 1$ とおく。 e は単位電荷、 m は電子の質量、 c は光の速さ。

[問 1]

N 個の電子スピンは、磁場と以下の相互作用を持つとする。

$$H_1 = -2\mu \sum_i s_z^i B$$

ここで B は z 方向の一様な外部磁場の強さ、 s_z^i は i 番目の電子スピン演算子の z 成分で固有値 $\pm\frac{1}{2}$ を取る。 N 個の独立な電子スピンの由来する磁気モーメントの期待値 (磁化) $M = \langle 2\mu \sum_i s_z^i \rangle$ を求めよ。また磁場が弱い場合の磁化率 $\chi = \frac{\partial}{\partial B} M$ を求めよ。

[問 2]

以下のハミルトニアンに従う 2次元自由電子を考える。

$$H_2 = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2)$$

電子は一辺長さ L の正方形の大きな領域に閉じ込められており、波動関数は周期的境界条件を満たすとする。 N 個の電子系について温度 T の分配関数 Z_N を計算し、自由エネルギー $F = -T \log Z_N$ と全エネルギーの期待値 E およびエントロピー S を求めよ。温度は充分高く Boltzmann 統計に従うとしてよい。スピン自由度も無視してよい。

[問 3]

前問において z 方向の磁場をかけると、電子は磁場中で角振動数 eB/mc の円 (サイクロトロン) 運動をするので、スピン自由度を無視するとそのエネルギーレベルは調和振動子と同様以下の様に量子化される。

$$H_3 = 2\mu B \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ここで n は 0 以上の整数。円運動の中心座標の自由度は、エネルギー固有関数の縮退をもたらす。エネルギー固有関数は、面積 $V_0 = \pi\hbar^2/m\mu B$ あたり 1つの密度で縮退する。 N 個の電子系について温度 T の分配関数 Z_N を計算し、自由エネルギー $F = -T \log Z_N$ を求めよ。問 2 同様に温度は充分高く Boltzmann 統計に従うとしてよい。 $B \rightarrow 0$ 極限における自由エネルギーを問 2 と比較せよ。

[問 4]

問 3 で考察した電子軌道運動に由来する磁化の期待値 $M = -\frac{\partial}{\partial B} F$ を求めよ。また磁場が弱い場合の磁化率 $\chi = \frac{\partial}{\partial B} M$ を求め、問 1 のスピンの由来する磁化率と比較せよ。スピンの寄与と軌道運動の寄与、各々の場合について外場 B を固定した時、磁化の影響を含めた平均の磁場の強さを求めよ。

第3問

図1のような、一様重力場中における質量 m の物体 (質点) の運動を考える. 時刻 $t=0$ の時, 物体を水平 x 軸と角度 α をなす方向に速さ v_0 で投げ出す. 物体は, 時刻 $t=T$ の時, 水平 x 軸を角度 β で横切るものとし, この時の座標を $(x, y) = (P, 0)$ とする. また, 速さ v の物体が受ける抵抗による力の大きさは kmv とする. ただし, 物体が投げ出される点 (時刻 $t=0$) を原点とし, 重力加速度の大きさを g とする.

【問1】

物体の運動方程式を水平・鉛直方向に分けて書け.

【問2】

問1の運動方程式を解き, 水平・鉛直方向の座標 (x および y) を, それぞれ時刻 t の式で表せ.

【問3】

十分な時間が経過した後の物体の水平方向の速さ $v_{x,\infty}$, 鉛直方向の速さ $v_{y,\infty}$, および水平位置 x_∞ を示せ.

【問4】

物体の軌道を表す式を求めよ.

【問5】

時刻 $t=T$ での水平到達距離 P が最大になるとき, 角度 α, β の関係式は $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ を満足することを示せ.

【問6】

物体の受ける抵抗がゼロである時 ($k=0$) に, 水平到達距離 P を最大とする α を導け. また, その結果と, 抵抗を無視した運動方程式から導かれる結果が等価であることを示せ.

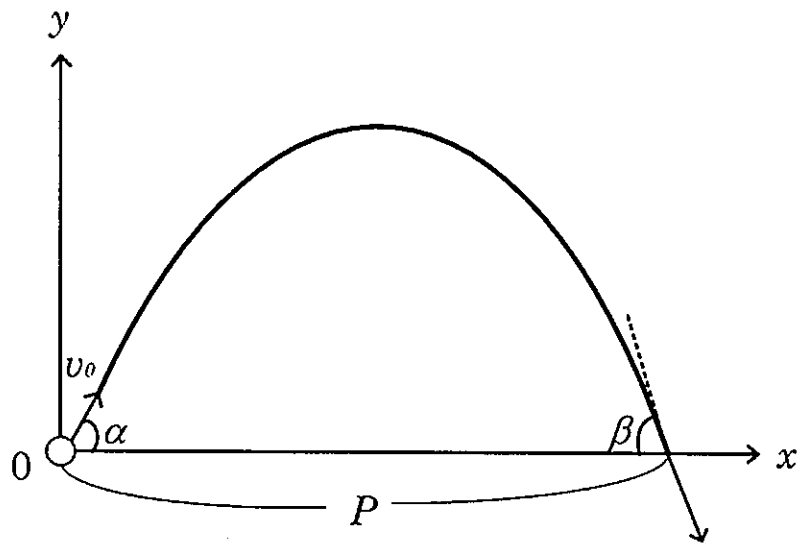


図 1. 質量 m の物体 (質点) の運動

第4問

図1にあるような断面を持つ無限に長い同軸管について以下の問いに答えよ。なお、この同軸管の内導体（半径 a ）、外導体（内半径 b 、外半径 d ）はともに完全導体（電気伝導率が無限に大きい導体）とする。また、内導体と外導体にはさまれた領域は真空とする。真空の誘電率、透磁率をそれぞれ ϵ_0 、 μ_0 とする。座標系は内導体の中心軸を z 軸とする円筒座標系 (r, θ, z) を用いる。



図1： 同軸管。

なお、MKSA 単位系（SI 単位系）でのマックスウェル方程式は以下のとおり。

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

本問では、 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ を仮定する。

また、円筒座標系でのベクトル \mathbf{X} を (r, θ, z) 方向の単位ベクトル \mathbf{e}_r 、 \mathbf{e}_θ 、 \mathbf{e}_z で

$$\mathbf{X} = R \mathbf{e}_r + \theta \mathbf{e}_\theta + Z \mathbf{e}_z$$

と書いた場合のベクトル微分演算は以下ようになる。

$$\text{div } \mathbf{X} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rR) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta + \frac{\partial}{\partial z} Z,$$

$$\text{rot } \mathbf{X} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} Z - \frac{\partial}{\partial z} \theta \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial}{\partial z} R - \frac{\partial}{\partial r} Z \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} R \right) \mathbf{e}_z,$$

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

【問 1】

図 2 のように、内導体と外導体の間に一定電圧 V を印加したときの静電場を r の 4 つの領域 ($0 < r < a$, $a < r < b$, $b < r < d$, $r > d$) それぞれについて求めよ。また、各導体表面に誘起される電荷について、 z 方向単位長さあたりの電荷量 λ をもとめよ。

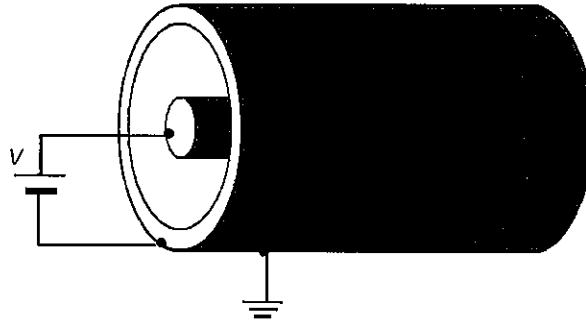


図 2 : 内外導体に電位差 V を与える。

【問 2】

内導体の z 正方向に $+I$, 外導体に逆方向 $-I$ の定電流を流したとき発生する磁場を, r の 4 つの領域 ($0 < r < a$, $a < r < b$, $b < r < d$, $r > d$) それぞれについて求めよ。ただし電流は、各導体中を一様に流れているものとする。

【問 3】

同軸管内 ($a < r < b$) を伝播する角周波数 ω の電磁波について、電場は r 成分、磁場は θ 成分のみ持ち、それぞれの関数形を

$$E_r = E_0 \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kz)}, \quad (1)$$

$$H_\theta = \left(1/Z_0\right) E_r \quad (2)$$

と仮定する (E_0 , Z_0 , k は定数)。式 (1) および (2) がマックスウェル方程式の解になるとき、定数 Z_0 (インピーダンス) および k はどのような条件を満足するか。なお $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ は、真空中の光速度 c に等しい。

【問 4】

電気伝導率 σ (σ は実数) を持つ一様な物質中での電磁波は、

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

をみます。図3で示すように、同軸管の $z < 0$ の領域の内外導体間は真空のままにし、 $z > 0$ を電気伝導率 σ の物質で埋めたとする。

$z > 0$ の領域を z の正方向に減衰しつつ伝搬する電磁波について、電場 (r 成分のみ持つ) および磁場 (θ 成分のみ持つ) を

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_0 \frac{1}{r} e^{i(\omega t - \tilde{k}z)}, \quad (3)$$

$$\tilde{H}_\theta = \left(\frac{1}{\tilde{Z}}\right) \tilde{E}_r, \quad (4)$$

としたとき、式 (3)、(4) の複素定数 \tilde{k} および \tilde{Z} を求めよ。ただし、この物質の誘電率、透磁率は真空のそれらと同じで、電気伝導率は十分大きいとする ($\sigma \gg \epsilon_0 \omega$)。

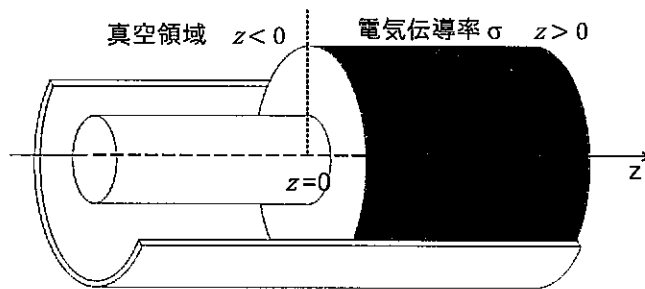


図3：同軸管の $z > 0$ に電気伝導率 σ の物質を詰める(説明のため外導体を半分取り去った)。

【問5】

図3の $z < 0$ 領域を正方向に伝搬してきた電磁波は、 $z = 0$ の境界で一部が反射し、残りは物質中を減衰しつつ伝搬する。いま、 $z < 0$ 領域を z の正方向に伝搬する電磁波の電場振幅を E_0^+ 、 $z = 0$ で反射し z の負方向に伝搬する電場振幅を E_0^- 、物質中に伝搬する電場振幅を \tilde{E}_0 としたとき、以下の関係が成り立つことを示せ。

$$E_0^- = \frac{\tilde{Z} - Z_0}{\tilde{Z} + Z_0} E_0^+,$$

$$\tilde{E}_0 = \frac{2\tilde{Z}}{\tilde{Z} + Z_0} E_0^+.$$

ここで \tilde{Z} および Z_0 は、それぞれ、物体中および真空中でのインピーダンスである。

第5問は次頁

第5問

X線を用いて物質の結晶構造を調べる実験手法の代表としてX線回折法が、化学状態・電子状態を調べる実験手法としてX線光電子分光法が、それぞれ挙げられる。これらの手法に関する以下の問いに答えよ。

【問1】

- (1) 結晶格子の基本周期を表すベクトルを \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} とし、X線の入射、散乱方向の単位ベクトルをそれぞれ \mathbf{s}_0 , \mathbf{s} とする。この時、散乱ベクトル \mathbf{S} を $\mathbf{S} = \mathbf{s} - \mathbf{s}_0$ で定義すると、散乱X線が強め合う条件は、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} = h\lambda, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{S} = k\lambda, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{S} = l\lambda$$

となる。ただし、 h, k, l は整数、 λ はX線の波長である。この条件を逆格子ベクトル

$$\mathbf{a}^* = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \mathbf{b}^* = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \mathbf{c}^* = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}$$

を用いて表すと、

$$\mathbf{S} = \lambda (h \mathbf{a}^* + k \mathbf{b}^* + l \mathbf{c}^*)$$

となることを示せ。

- (2) 図1は、(1)で示した条件を視覚的に理解するためのもので、網目で表した逆格子の上に、半径 $1/\lambda$ の円を重ねてある。この時、(あ)、(い)、(う) はそれぞれどのベクトルに対応するか。

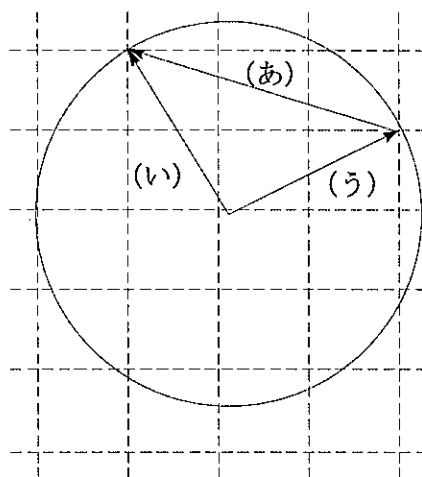


図1

- (3) 図2は面心立方格子と体心立方格子(ともに $|a|=|b|=|c|$ である)の単位格子内に含まれる原子を描いたものである。立方体の頂点の他に、面心立方格子では立方体の各面の中心に、体心立方格子では立方体の中心に、それぞれ原子が存在する。図中に灰色で示した原子($n=1-4$)の位置ベクトルを、黒で記した原子(0)の位置を原点として、

$$\mathbf{r}_n = x_n \mathbf{a} + y_n \mathbf{b} + z_n \mathbf{c}$$

の形で示せ。

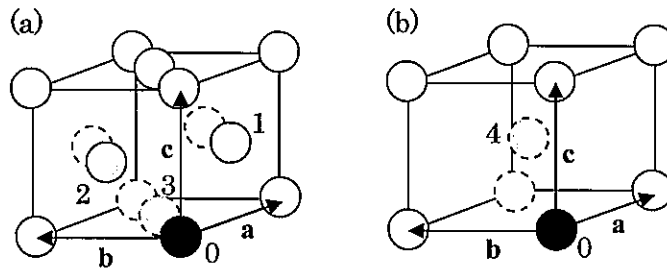


図2：面心立方格子(a)および体心立方格子(b)の単位格子内に含まれる原子の配置

- (4) 単位格子中に N 個の原子がある場合、(1)で示した散乱 X 線が強め合う条件を満たす回折 X 線の振幅は、 n 番目の原子の位置ベクトル \mathbf{r}_n を用いて次のように表せる。

$$F(hkl) = \sum_n f_n(hkl) \exp[2\pi i(hx_n + ky_n + lz_n)]$$

ただし、 $f_n(hkl)$ は n 番目の原子の X 線散乱能であり、原子の種類が同じであれば hkl のみに依存する。結晶の周期性を考慮に入れると、図2で黒色および灰色で示した原子の分のみを計算すればよい。この時、 $F(hkl)$ がゼロになるような h, k, l の条件を、面心立方格子および体心立方格子に対してそれぞれ求めよ。

- (5) 表1は、粉末試料に対して回折 X 線が観測されるとき s と s_0 のなす角度(2θ)およびそれを用いて計算した $\sin \theta$ の値をまとめたものである。この試料は面心立方格子と体心立方格子のうちどちらであるか。また、格子定数($|a|=|b|=|c|$)を有効数字2桁で求めよ。

表1：X線の波長 $\lambda = 0.154$ nm に対する回折角 2θ と $\sin \theta$

2θ	27.4°	31.7°	45.5°	54.0°	56.6°	66.3°
$\sin \theta$	0.237	0.273	0.387	0.454	0.474	0.547

【問 2】

- (1) 物質に X 線などの光を照射すると光電子が放出される。今、ある物質の仕事関数(物質から電子が飛び出すのに必要な光の最低エネルギー)を ϕ としよう。また、物質中に含まれる電子のエネルギーの上端を Fermi 準位と呼ぶ。結合エネルギー E_B (Fermi 準位から測ったエネルギーで、正の値として定義される)をもつ電子がエネルギー $h\nu$ の X 線によって光電子として放出されるとき運動エネルギー E_k を求めよ。なお、電子の放出によってエネルギー準位が変化することはないと仮定する。
- (2) 光電子分光の実験においては、X 線によって放出される電子の運動エネルギーを測定し、(1)で求めた式を用いることによって電子の結合エネルギーを決めることができる。表 2 は、いくつかの試料に対して得られた、2p 電子の結合エネルギーをまとめたものである。(あ) ~ (え) のそれぞれに、以下の括弧内に示す試料のうちのどれが当てはまるかを推測し、その根拠を論ぜよ。
- (Cu, Ni, Si, SiO₂)

表 2：さまざまな試料に対する 2p 電子の結合エネルギー

試料	(あ)	(い)	(う)	(え)
結合エネルギー (eV)	99.4	103.4	852.7	932.7

- (3) 光電子が固体の内部を通る際、ある確率で非弾性散乱を受ける。その結果、光電子がエネルギーを保ったままで固体の中を距離 x だけ進むことができる確率は $\exp(-x/\lambda_e)$ で近似できる。ここで λ_e は電子の平均自由行程と呼ばれる。この近似のもとで、表面が完全に平坦な試料の深さ z で発生した光電子が表面まで到達する確率を、図 3 に示す二つの場合について求めよ。ただし、光電子が運動エネルギーを保ったまま方向を変えることはないとする。
- (a) 光電子が表面に対して垂直な方向に、表面に向けて放出された場合。
- (b) 光電子が(a)と 60 度をなす方向に放出された場合。

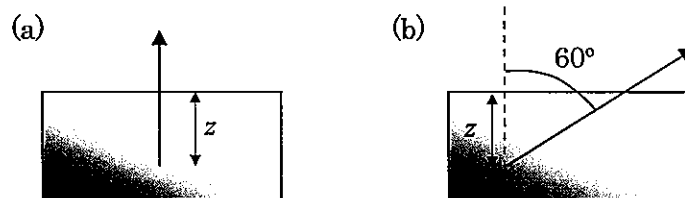


図 3: 光電子の放出角度の定義

- (4) 固体試料において、深さ(z)方向に元素がどのように分布しているかを知ることは重要である。今、Fe と Co の合金からなる厚さ 2 nm の薄膜があり、図 4 のように表面から深さ 1 nm までの部分と、それより深い部分では Fe と Co の組成比が異なっているとす。どちらの部分の方が Fe の含有量が多いかを、試料を破壊することなく知るためにはどのような実験が有効か、(3)の結果をもとに考えよ。なお、Fe と Co から放出される光電子の平均自由行程は、ともに 1 nm であるとする。

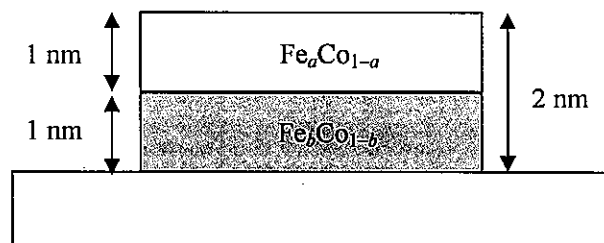
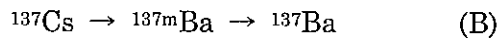
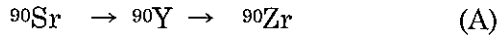


図 4

第6問

図1は良く使われる放射線源 ^{90}Sr (A)と ^{137}Cs (B)の崩壊図である。それぞれ



のように 逐次崩壊する。

^{90}Sr は半減期 28.79 年で 100%の分岐比での ^{90}Y の基底状態へ β^- 崩壊する(反応の Q 値は 546.0 keV)。 ^{90}Y は半減期 64.00 時間で、99.9885%の分岐比で ^{90}Zr の基底状態へ β^- 崩壊し、その Q 値は 2280.1 keV である。

^{137}Cs は半減期 30.07 年で 94.4%が ^{137}Ba の準安定励起状態(核異性体) $^{137\text{m}}\text{Ba}$ (励起エネルギー661.659 keV) へ、5.6%が ^{137}Ba の基底状態へ β^- 崩壊する。 $^{137\text{m}}\text{Ba}$ は半減期 2.552 分で核異性体遷移により基底状態になる。このうちある割合は、 γ 線を放出する。この γ 線崩壊の割合は ^{137}Cs の崩壊あたり 85.1%である。

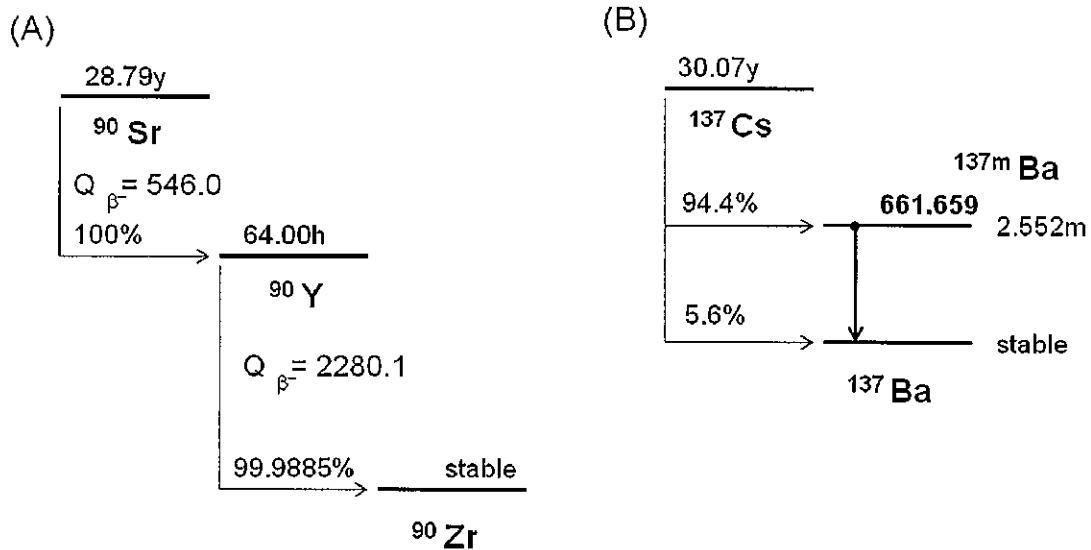
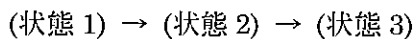


図1 (A) ^{90}Sr の崩壊図. (B) ^{137}Cs の崩壊図.

【問1】一般に、このような逐次崩壊



において、(状態 1)、(状態 2)の個数を $N_1(t)$, $N_2(t)$ 、それぞれの崩壊定数を λ_1 , λ_2 として満たすべき微分方程式を書け。なお、単位時間当たりの崩壊数はその親核数に比例し、その係数を崩壊定数という。

【問2】【問1】で示した方程式を初期条件 $N_1(t=0)=N_{10}$, $N_2(t=0)=N_{20}$ の下で解け。

【問 3】半減期 T と崩壊定数 λ の関係を書け。

【問 4】放射能を表す単位として、Bq(ベクレル)がある。1 Bq とは 1 秒間に 1 崩壊が起こる放射能である。1 MBq(メガ・ベクレル)の ^{90}Sr と ^{137}Cs の質量はいくらか？有効数字 2 けたで答えよ。ただし、 $\ln 2=0.693$ 、アボガドロ数 $N_A=6.02\times 10^{23}$ [mol]、1 年は 3.16×10^7 [sec]である。

【問 5】 $t=0$ で 1 MBq の ^{137}Cs を分離した場合、 $t=2.6$ 分、5.2 分、10.4 分、15 年、30 年、60 年での $^{137\text{m}}\text{Ba} \rightarrow ^{137}\text{Ba}$ で放出される γ 線の強度を求めよ。簡単のため ^{137}Cs 、 $^{137\text{m}}\text{Ba}$ の半減期をそれぞれ、30 年、2.6 分として、有効数字 2 けたで求めよ。

ヒント：【問 1】【問 2】とは違い、崩壊の分岐比も考慮すること。

【問 6】 ^{90}Sr 線源からの β 線および ^{137}Cs 線源からの γ 線のエネルギースペクトルを図示し、説明せよ。エネルギースペクトルとは、横軸にエネルギーをとり、縦軸にその頻度を示したものである。

【問 7】これらの線源からの β 線、 γ 線のエネルギーを測定するのに適した検出器をあげ、その原理を説明せよ。また、これらの検出器で【問 6】のエネルギースペクトルを測定するとどのように観測されるかについても述べよ。

第7問

直径 a の十分長い導線を平行に二本、線間 $d (>> a)$ で設置する。導線の抵抗は無視でき、空気の比誘電率、比透磁率は 1.0 とする。この二本の導線を信号伝送路として使うことを考える。伝送波の波長よりも d が十分短い場合伝送波は TEM 波となり広帯域の信号を伝送できる。このような伝送線をレッヘル線という。今、特性インピーダンス 300Ω のレッヘル線を用意する。

【問1】

このレッヘル線的一端に図1のように内部抵抗 Z を持つ電圧 V の定電圧直流電源を接続し、反対の端に抵抗 R をつなぐ。抵抗 R で最も大きく電力を消費するための条件を求めよ。

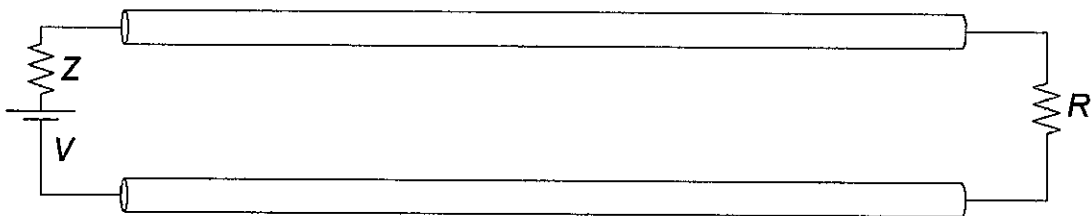


図1

【問2】

このレッヘル線に図2のように出力インピーダンスが 300Ω のパルス発生器をつなぎ、パルス発生器からある距離離れた地点の信号をレッヘル線の特性インピーダンスより十分高いインピーダンスのプロープで観測する。レッヘル線の終端はインピーダンス整合されている。オシロスコープで観測した CH1 の信号は図3のようであった。CH1 プロープの地点から 1.0 m 遠い場所の信号を CH1 で使用したプロープと等長のプロープで CH1 と同時に観測する (CH2 に入力する)。オシロスコープに現れる信号の概要を示せ (CH1 と CH2 のトレースを示すこと。また、電圧、時間も記入すること。CH1 と CH2 はトレースが重ならないようオフセットを適当に動かすこと)。プロープの周波数特性は十分広帯域でオシロスコープとの整合がとれており、CH1 と CH2 は同じ極性となるようを用いる。

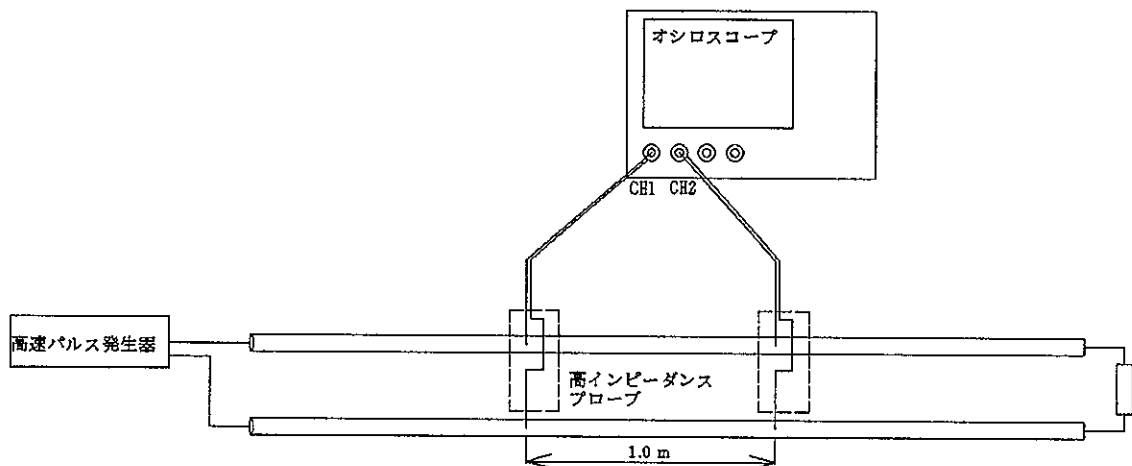


図2

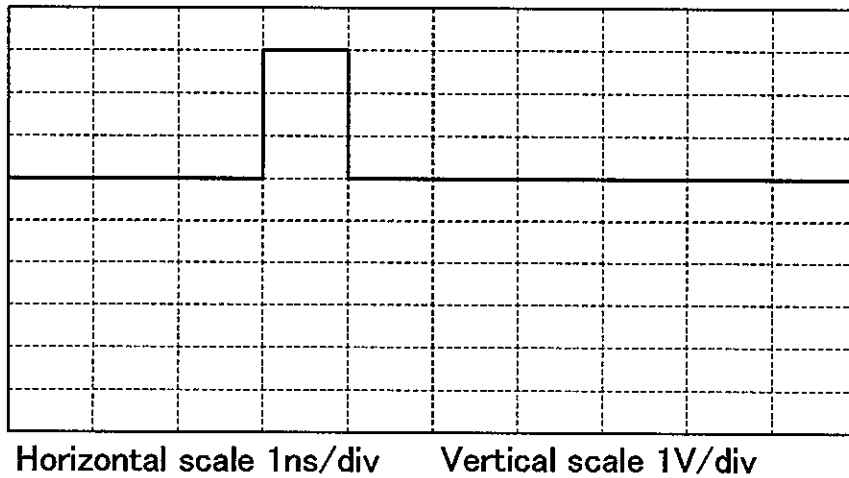


図3

【問3】

問2で用いたパルス発生器のパルス幅を 10 ns に広げ、レッヘル線の終端から 10 m のところを
図4のように CH1 のプローブで観測する。(a)レッヘル線の終端が開放のとき、(b)300 Ω の負荷を
つけたとき、(c)短絡のとき、それぞれ観測される波形の概要を図示せよ。

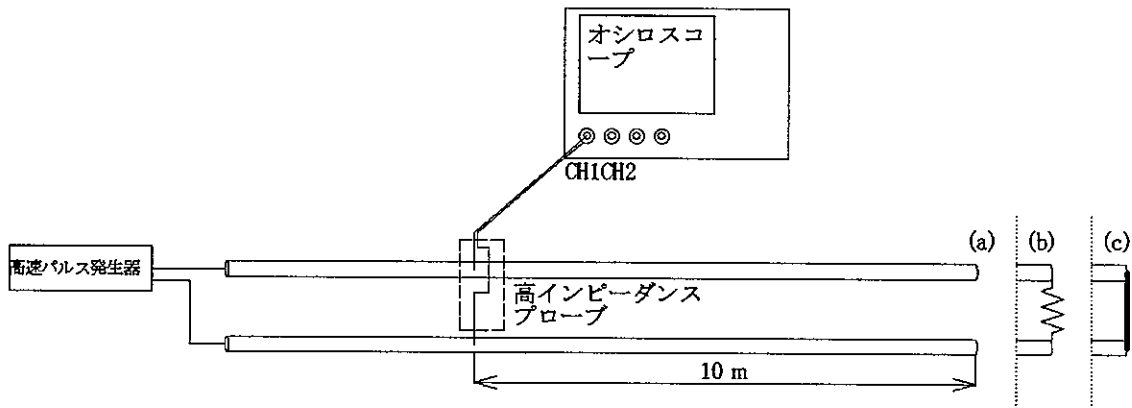


図4

【問4】

このレッヘル線間に比誘電率 ϵ_r の媒質を入れ、レッヘル線を伝送する信号の伝搬速度を計測する。

- (1)測定する時間を t 、時間の測定誤差を Δt 、距離を L 、距離の測定誤差を ΔL とし、信号伝搬速度とその誤差を求めよ。
- (2)この測定で系統誤差を軽減する方法を述べよ。

【問5】

この伝送線で伝送する信号を図5のように二本の同じ特性インピーダンス 300Ω のレッヘル線に等しい電力で分配する。分岐した先のレッヘル線の終端にはインピーダンス整合した負荷がついており、分岐点ではどの方向からも信号の反射が無いようにする。

(1) 図中の抵抗 R の値を求めよ。

(2) 分配前のパルスの電力は P であった。分配後の信号の各終端負荷での電力の合計を求めよ。

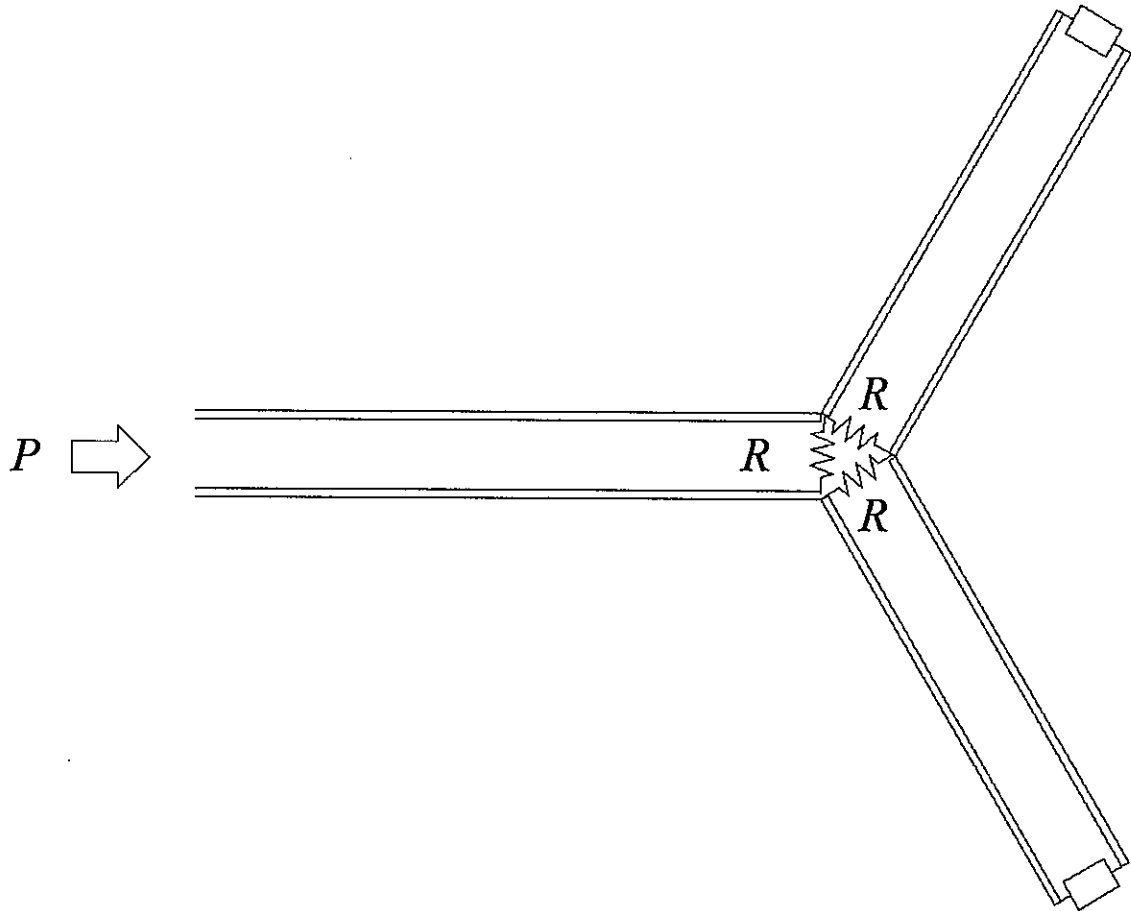


図5

