総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

５年一貫制博士課程入学試験問題

数　学

平成２３年８月３０日（火）９時３０分～１１時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること。

☆ 試験問題（４問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第○○問□□枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること。

解答できない場合も、受験番号、氏名、問題番号を記入し、提出すること。

☆ 解答用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に知らせること。

問題は次頁

第１問

【問１】

２行２列の実行列 A に対して，一次変換

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

を考える．任意の実数 x, y に対して，

$$\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = x^2 - y^2 \tag{2}$$

となるために A の満たすべき条件が，

$$A^{\mathrm{T}} \eta A = \eta \,, \qquad \eta \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

により与えられることを示せ．(但し，A^{T} は行列 A の転置行列を表す．)

【問２】

２行２列の実行列 B も【問１】の条件を満たすとき，行列の積 AB も又，同じ条件を満たすことを示せ．

【問３】

$A = \mathbf{1}$（２行２列の単位行列）は自明に【問１】の条件を満たす．そこで２行２列の実行列 T に対して，$A = \mathbf{1} + \varepsilon T$ を考え，$\varepsilon \ll 1$ とする．ϵ に関して２次以上の微小量を無視するとき、$A = \mathbf{1} + \varepsilon T$ が【問１】の条件を満たすための必要十分条件が

$$T \propto \sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

で与えられることを示せ．

【問４】

実数パラメタ τ を引き数とする２行２列の実行列 $X(\tau)$ を

$$X(0) = \mathbf{1} \tag{5}$$

$$\frac{d}{d\tau} X(\tau) = \sigma_1 X(\tau) \tag{6}$$

により定義する．$X(\tau)$ が任意の τ に対して，【問１】の条件を満たすことを示せ．

【問５】

$X(\tau_1)\,X(\tau_2) = X(\tau_1 + \tau_2)$ を示せ．

【問６】

$X(\tau)$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

第2問

【問1】

次の関数のグラフを $-4\pi \le x \le 4\pi$ の範囲で図示せよ.

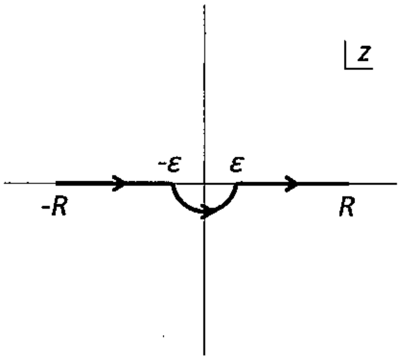
$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{1}$$

【問2】

式 (1) で与えられる関数 $f(x)$ に対して,

$$I(k,R) = \int_{-R}^{R} dx\, f(x)\, \mathrm{e}^{ikx} \tag{2}$$

を定義する.(k, R は実数, $R > 0$ とする.) この積分は,右図のような経路 C に沿う積分を用いて



$$I(k,R) = \int_C dz\, f(z)\, \mathrm{e}^{ikz} \tag{3}$$

と書くことができる.

次に, $I(k,R)$ の $R \to \infty$ における極限値

$$F(k) = \lim_{R\to\infty} I(k,R) \tag{4}$$

を計算したい. $F(k)$ を2つの寄与に分け,

$$F(k) = F_+(k) - F_-(k) \tag{5}$$

$$F_\pm(k) = \lim_{R\to\infty} \int_C dz\, \frac{\mathrm{e}^{i(k\pm1)z}}{2iz} \qquad \text{(複号同順)} \tag{6}$$

と書けることを示せ.

【問3】

式 (6) に対して留数の方法を用いることにより, $F(k)$ を k の関数として求めよ.

【問4】

上で求めた $F(k)$ に対して,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} F(k)\, \mathrm{e}^{-ikx} \tag{7}$$

を計算し, $f(x)$ との関係について述べよ.

第3問

【問1】

関数 $f(x)$ に対する2階の微分方程式

$$f(x)\,f''(x) = 1 + \{f'(x)\}^2 \tag{1}$$

を考える．但し，

$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx}\,, \quad f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \tag{2}$$

とする．次のように定義される関数 $g(x)$ に対して，$g'(x) = 0$ となることを導け．

$$g(x) = \frac{1 + \{f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^2} \tag{3}$$

【問2】

上の事実を利用することにより，$f(x)$ に対する微分方程式 (1) の一般解を求めよ．

第4問

【問１】
$-1 \leq x \leq 1$ で定義された実関数 $f(x)$ が

$$f(-1) = f(1) = 0 \tag{1}$$

を満たすとする．このような関数 $f(x)$ に対して，積分

$$U[f] \equiv \int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 \, dx \tag{2}$$

を定義する．次に

$$\delta U \equiv U[f + \delta f] - U[f] \tag{3}$$

を考える．但し，$\delta f(x) = \varepsilon \varphi(x)$ とし，$\varphi(x)$ は $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ を満たす実関数とする．ε は小さいとして，その２次以上の微小量を無視すると，δU は

$$\delta U = \int_{-1}^{1} g(x) \, \delta f(x) \, dx \tag{4}$$

と書くことができる．$f(x)$ を用いて $g(x)$ を具体的に書け．

【問２】
同様に積分

$$K[f] \equiv \int_{-1}^{1} \{f'(x)\}^2 \, dx \tag{5}$$

(但し，$f'(x) \equiv \frac{d f(x)}{dx}$) を定義し，$\delta K \equiv K[f + \delta f] - K[f]$ とすると，

$$\delta K = \int_{-1}^{1} h(x) \, \delta f(x) \, dx \tag{6}$$

と書くことができる．$f(x)$ を用いて $h(x)$ を具体的に書け．

【問３】
$\delta U = 0$ となるような任意の $\delta f(x)$ に対して，$\delta K = 0$ となるために，$f(x)$ が満たすべき条件を求めよ．

【問４】
式 (1) の条件を考慮して，【問３】を満たす $f(x)$ の一般解を求めよ．