総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

５年一貫制博士課程入学試験問題

物 理

平成２１年９月１日（火） １３時００分～１６時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること。

☆ ７問の中から、４問を選んで解答せよ。

ただし、素粒子原子核専攻理論部門（含む宇宙理論）を志望する（志望順位を問わず）受験者は第１問（量子力学）を必ず選択しなければならない。

☆ 試験問題（４問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること。解答できない場合も、受験番号、氏名、問題番号を記入し、提出すること。

☆ 解答用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に知らせること。

第1問　量子力学

［1］質量 m の粒子がエネルギー E で図1のような一次元のポテンシャル障壁

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ V_0 & (0<x<a) \\ 0 & (x>a) \end{cases}$$

の左側から入射したとする。ここで、エネルギーは $0<E<V_0$ の条件を満たす。

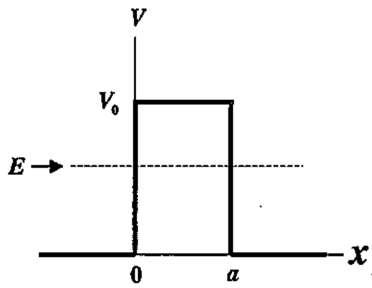

図1: 長方形型ポテンシャル

(1.1) 波動関数を $\psi(x,t)$、確率密度を $\rho=|\psi(x,t)|^2$、確率の流れを

$$J(x,t)=\frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}-\psi(x,t)\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial x}\right]$$

とすれば、連続の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}J(x,t)=0$$

が満たされることを、時間に依存するシュレーディンガー方程式を用いて示せ。

(1.2) 設問にあるように粒子がポテンシャル障壁の左側から入射した場合を考え、$x<0$, $0<x<a$, $x>a$ の3つの各々の領域において、シュレーディンガー方程式を書き、解を求めよ。次に、$x=0$ と $x=a$ において波動関数の接続条件を示せ。

(1.3) この粒子が障壁を通過する透過係数を求めよ。

(1.4) $\sqrt{2m(V_0-E)}=p$ とおけば、$pa\gg\hbar$ の場合に (1.3) の透過係数は近似的に $\exp(-2pa/\hbar)$ で与えられることを説明せよ。

［2］次に、質量mの粒子が図2の1次元ポテンシャル

$$V(x)=\begin{cases}0 & (x<-x_3)\\ c\left(1+\frac{x}{x_3}\right) & (-x_3<x<-x_1)\\ 0 & (-x_1<x<x_1)\\ c\left(1-\frac{x}{x_3}\right) & (x_1<x<x_3)\\ 0 & (x>x_3)\end{cases}$$

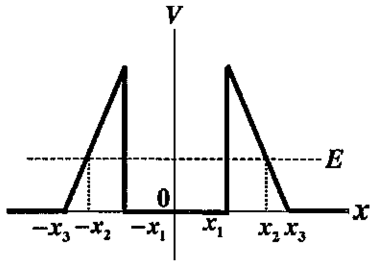

図2：1次元のポテンシャル

の中に束縛されているとする。ここで、cは正の定数、x_1はポテンシャルが0から$c(1-x/x_3)$に変化する位置、x_2は粒子のエネルギーをEとして$E=c(1-x/x_3)$が成立する位置、x_3はポテンシャルが$c(1-x/x_3)$から0となる位置である。なお、Eは$E<c(1-x_1/x_3)$を満たし、粒子の運動は非相対論的であると仮定して以下の設問に答えよ。

(2.1) (1.4)で得られた幅aのポテンシャルの透過係数$\exp(-2pa/\hbar)$を用い、粒子が図2の右側の障壁を透過する確率(ガモフの透過因子)を求めよ。なお、(1.4)において用いた条件が成立する範囲内でx_1からx_2の領域を小さい区間に分割して求められた透過係数は、x_1からx_2の領域の積分として近似できるとする。

(2.2) 粒子が障壁を透過して遠方に出ることを、この束縛系の崩壊とする。ガモフの透過因子を計算することにより、この崩壊の平均寿命を求めよ。

第２問　統計力学

自由電子気体の熱容量の外場依存性を調べるために以下の問題を考える。電子の質量を m、個数を N、温度を T とし、ボルツマン定数を k、プランク定数を h とする。また電子気体の容器は一辺 L の十分大きな立方体とする。以下簡単のため電子のスピンは無視し、電子系は Boltzmann 統計に従うとする。

1. 外場がない時の電子のエネルギーは

$$E = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) \tag{1}$$

で与えられる。

(a) 全粒子についての分配関数を求めよ。

(b) また、その熱容量が $C = \frac{3}{2}Nk$ で与えられることを示せ。

2. 一様な磁場 H が z 方向にあると場に垂直な平面内の運動は離散化され、電子のエネルギー準位はいわゆるランダウ準位

$$E(l, p_z) = 2\mu_B H\left(\ell + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2m}p_z^2, \quad (\ell = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

で与えられる。ここで $\mu_B = eh/(4\pi mc)$ である。

(a) 量子数 ℓ の準位の縮重度を求めよ。ここで、式 (1)、(2) を比較し、磁場 H によって $2\mu_B H\ell < (p_x^2 + p_y^2)/(2m) < 2\mu_B H(\ell+1)$ の範囲の状態が $2\mu_B H\left(\ell + \frac{1}{2}\right)$ の準位に束ねられ量子化されるので、その範囲について $H = 0$ でのエネルギー準位の数 $\frac{L^2}{h^2}dp_x dp_y$ を積分すればよいことに注意せよ。

(b) 全粒子についての分配関数を求めよ。

(c) 熱容量を求め、磁場の関数としておおまかに図示せよ。ただし図中には $\mu_B H \ll kT$ および $\mu_B H \gg kT$ における極限値も記せ。

3. 磁場に加えて重力場が z 方向にある場合、電子のエネルギーが $E(\ell, p_z, z) = E(\ell, p_z) + mgz$ で与えられるとして、重力場による熱容量の変化分を求めよ。ここで g は重力加速度であり、$L \gg kT/mg$ の極限を考える。また、熱容量が変化した物理的理由も考察せよ。

第３問　電磁気学

真空中および導体中の電磁現象は、以下のマクスウェル方程式で記述されるものとする。

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=\rho$$
$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{H}-\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\mathbf{J}$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$$

真空中の光速、誘電率、透磁率をそれぞれ$c,\ \varepsilon_0,\ \mu_0$として、以下の設問に答えよ。

〔設問 A〕図１に示すように、空間が$z<0$は真空、$z>0$は一様に等方的な導体（誘電率：ε、透磁率：μ、電気伝導率：σ）で満たされている。真空側から導体面に垂直に、角振動数ωの電磁波が連続的に入射している。入射電磁波の電場ベクトルは、複素数表示で $\mathbf{E}=(E_x,E_y,E_z)=(E_0e^{-i\omega(t-z/c)},0,0)$ と書けるとし、以下の設問に答えよ。ここで、導体中ではオームの法則$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$が成り立ち、また、$\sigma/(\omega\varepsilon)\gg 1$が満たされるものとする。

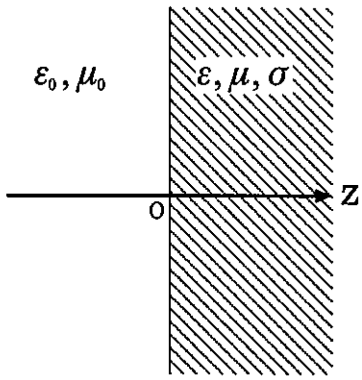

図 1. 半無限導体。

A－１）導体中において電場の満たすべき方程式を、マクスウェル方程式とオームの法則から磁場と電流密度を消去して求めよ。必要ならば、以下の数学公式を使用してよい。

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{A})=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{A})-\Delta\mathbf{A}\quad(\Delta\text{はラプラシアン})$$

A－２）導体に入射した電場は進行と共に減衰する（$|\mathbf{E}|\propto e^{-z/\delta}$）。この現象を表皮効果と呼ぶが、減衰の指標となる量δ（スキンデプスと呼ぶ）を求めよ。導体中の電場を$\mathbf{E}=(E_x,E_y,E_z)=(E_0e^{-i(\omega t-kz)},0,0)$と表現するとよい。

A－３）導体中における電場成分E_xと磁場成分の間の関係式を求めよ。但し、微分や積分を含まないこと。

〔設問 B〕真空中で、図２に示すように、中心軸がｚ軸と一致した半径aの無限長円筒領域内に、ｚの正方向に速さｖで移動している電荷qの点電荷（以下、点電荷qと呼ぶ）が一様な数密度nで存在している。点電荷の分布が時間的に変化しないと仮定して、以下の設問に答えよ。

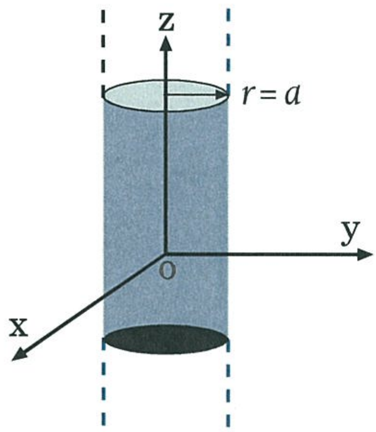

図 2. 電荷分布領域。

B―１）この電荷分布による電場ベクトル**E**を、電荷分布領域の内と外に場合分けして求めよ。

B―２）同様に、磁場ベクトル**H**を、電荷分布領域の内と外に場合分けして求めよ。

B－３）電荷分布を構成する点電荷の内、ｚ軸からr $(0<r<a)$の距離にあり、ｚの正方向に速さｖで移動している１つの点電荷qに着目する。この点電荷がr方向（ｚ軸から離れる方向を正とする）に受ける力を求めよ。但し、速さｖの代わりにローレンツ因子$\gamma=1\big/\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}$の関数として表せ。

B－４）前問 B－３）までの電荷分布に加えて、同じ無限長円筒領域内に、ｚの負方向に速さｖで移動している点電荷qが一様な数密度nで存在する場合を考える。ここでも、ｚ軸からr $(0<r<a)$の距離にあり、ｚの正方向に速さｖで移動している点電荷qの１つに着目する。この点電荷がr方向に受ける力を、ローレンツ因子が無限大の極限（$\gamma=1\big/\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}\to\infty$）について求めよ。ここでは、点電荷同士の散乱は無視してよい。

B－５）前問B－４）で、ｚの負方向に移動する点電荷の電荷が$-q$の場合について、同様の力を同じくローレンツ因子が無限大の極限（$\gamma=1\big/\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}\to\infty$）について求めよ。ここでも、点電荷同士の散乱は無視してよい。

第4問　力学

図1のように、質点Eが、座標原点にある質量Mの物体Sから中心力を受けて、2次元平面内で運動する場合を考える。その力の大きさは質点Eの質量mに比例し距離rの2乗に反比例して、

$$\vec{f}(r) = -\frac{m\mu}{r^2}\vec{e}_r$$

と表される。ここで、μは力の強さを表す定数であり($\mu > 0$とする)、$\vec{e}_r$は座標原点から動径方向を向いた単位ベクトルである。物体Sは質点Eよりはるかに重い($M \gg m$)と仮定し、質点Eの運動のみを考える。運動は非相対論的に取り扱う。

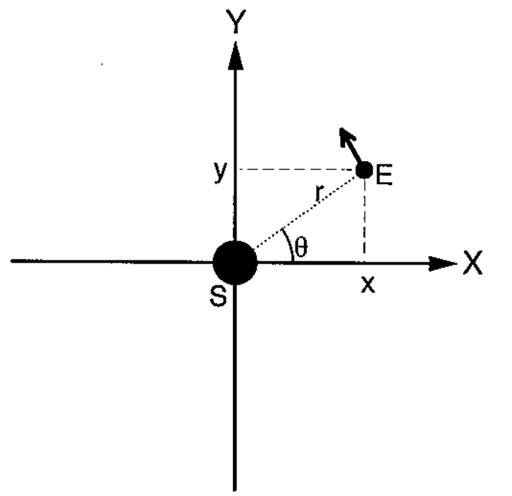

図1

設問A

以下の設問【A-1】から【A-4】に沿って、質点Eの運動を記述するラグランジアンLを求め、さらに運動方程式を導け。

【A-1】 質点Eの運動エネルギーを、まずデカルト座標(x, y)を用いて表し、さらに極座標(r, θ)を用いて表せ。なお、位置の時間微分については、例えば$\dot{x}$のように表すこと。

【A-2】 物体Sが作る力の表式からポテンシャルエネルギーを極座標表示で求めよ。ただし、ポテンシャルエネルギーの基準はrが無限大でゼロとなるように定めよ。

【A-3】 この系のラグランジアンは運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを引いたものとして表される。極座標を使ってこの運動のラグランジアンLを求めよ。

【A-4】 ラグランジュの運動方程式は、一般化座標qに対して次のようになる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

極座標(r,θ)に対するラグランジュの運動方程式を書き下せ。

設問B

設問Aの結果を利用して、以下の設問【B-1】から【B-4】に沿って、質点Eの運動の物理的特性を考察せよ。

【B-1】 角度θに関する共役運動量$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$(角運動量)が保存量であることを示せ。さらに、これをℓと置くことでrとその時間微分の項のみを含んだ運動方程式を導け。

【B-2】全エネルギー W が次の式のように書けることを示せ。

$$W = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2m}\frac{1}{r^2} - \frac{m\mu}{r}$$

また、この全エネルギー W が保存量であることを示せ。

【B-3】設問【B-2】で導出した全エネルギー W の第2項と第3項の和のことを有効ポテンシャルと呼ぶ。この有効ポテンシャルの形を横軸を r として図示せよ。さらに、質点Eの運動が r の無限遠方まで到達しうる条件について論ぜよ。

【B-4】全エネルギー W の表式を、動径運動の速さ $\dot{r}$ を表す式として書き直せ。$\dot{r} = 0$ となる r の値を求め、W の範囲をしかるべく区分けして、それぞれの範囲においての質点Eの運動の物理的特性を論ぜよ。

第5問　総合問題　1

1. 光速（c)、万有引力定数（G)、プランク定数（h）は普遍的な物理定数である。

（ア）以下の空欄を埋めよ。

(a) 光速はおよそ $c = 3.0 \times 10^{\square}[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$ である。

(b) プランク定数は $h = 6.6 \times 10^{-34}[\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}] = 4.1 \times 10^{-15}[\square \cdot \mathrm{s}]$ である。[J] はジュール（$[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}]$)、空欄は素粒子・原子核物理学で良く使われるエネルギーの単位である。

(c) 二つの物体が引き合う力の大きさは、各物体の質量を M、m、物体間の距離を r として、$F = \frac{GMm}{r^2}$ となる。万有引力定数は $6.7 \times 10^{-11}[\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{\square}]$ である。

（イ）c, G, h を組み合わせて時間の次元をもつ量を得ることができる。これをプランクの時間（t_P）と言い、時間の尺度として使うことができる。同様にアインシュタインの公式（$E = mc^2$）を使うと、エネルギーの次元をもつ組み合わせがあり、それをプランクのエネルギー（E_P）と言う。それらについて以下の設問に答えよ。

(a-1) 次元解析を行い、プランクの時間を c, G, h で表せ。

(a-2) 次元解析を行い、プランクのエネルギーを c, G, h で表せ。

(b-1) プランク時間を秒の単位で計算せよ。有効数字は1桁でよいが、桁数を間違えないこと。

(b-2) プランクのエネルギーを（ア）の (b) で答えたエネルギーの単位で計算せよ。有効数字は1桁でよいが、桁数を間違えないこと。

2. アインシュタインの一般相対性理論の解の一つで、膨張宇宙を表わす解は、$G = c = 1$ とおくと、

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi P$$

という方程式に従う。ただし、簡単の為に、宇宙項がなく、宇宙の曲率がゼロの場合を考えた。$a(t)$ は宇宙の膨張を表わすスケール因子、$\rho(t)$ は宇宙を占める物質の密度、$P(t)$ はその圧力である。

（ア）これらの二つの式から、a の時間による2階微分を消去して、

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0$$

を導け。

（イ）P と ρ の関係が状態方程式 $P = w\rho$（w は定数）で与えられる場合に $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ が上式の解であることを示せ。

(ウ) (イ) の結果を用いて $a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$ となることを示せ。

(エ) w の値は宇宙を構成するものが何かによって決まる。現在宇宙の年齢は 140 億年であり、宇宙誕生から 40 万年後（宇宙の晴れ上がりの時期と言う）には宇宙は通常の原子のような物質が優勢になったと言われている。その時から現在までずっと物質優勢であったとすると、その期間、$w = 0$ である。この場合に、宇宙の晴れ上がりの時期から現在までに宇宙がどのくらい膨張したかを求めよ。有効数字 1 桁で計算すればよい。

3. 宇宙が膨張するに従って様々な素粒子や原子核の反応が起こって現在に至っていると考えられている。

(ア) ある時点で宇宙が光子・電子・陽子・中性子・ニュートリノなどに満ちていたとして、恒星の構成要素であるヘリウム 4 原子核はどのような反応で生み出されたと考えられるか。定性的に簡潔に議論せよ。

(イ) 宇宙の寿命が無限であり、陽子崩壊の平均寿命が 10^{35} 年であると仮定する。現在観測可能な宇宙には 10^{80} 個の陽子があるとするとこれらの陽子がすべて崩壊してしまうにはどれくらいの時間がかかるか？宇宙における陽子数が 1 個となった時点ですべて崩壊したということにし、$\log_e 10 = 2.3$ とする。有効数字 2 桁まで計算すればよい。

第６問　総合問題２

MKSA 単位系を用いて、以下のマクスウェル方程式をもとに答えよ。

$$div\boldsymbol{D} = \rho\,, \qquad div\boldsymbol{B} = 0\,, \qquad rot\boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{J}\,, \qquad rot\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0\ .$$

$$(\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}\,,\ \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H})$$

図１に示す誘導加速器(左)と電流モニター(右)を考える。真空中を電子ビームが左から右にパルス状に通過する。

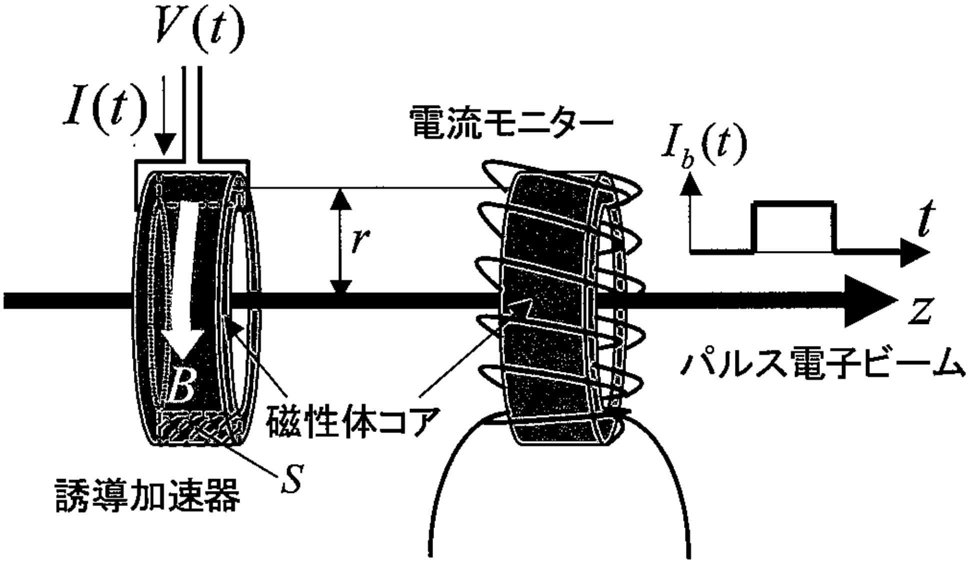

図１：誘導加速器と電流モニター

誘導加速器（図１左）とは、磁性体に巻いたコイルに流す電流$I(t)$ による変動磁場$B(t)$が誘起する z 方向の電場で電子ビームを加速する加速器である。

(1) 磁性体コアの比透磁率μ_rが十分大きいと、コアから外部（非磁性体）への磁束密度Bの漏れは非常に小さい。その理由を、磁性体と外部との境界条件を導き、それを使って説明せよ。

(2) コイルの入力電流$I(t)$により発生するコア内の磁束$\Phi(t)$を求めよ。ただし磁性体内の磁束密度$B(t)$は均一であるとし、またビーム軸からコア中心までの距離をr、コアの断面積をSとし、コアは薄いものとする。さらに磁束$\Phi(t)$の変化によりコイルに発生する電圧（逆起電力）$V(t)$を求めよ。ただし、コイルの端子の間隔は十分に近く無視できるとする。

(3) 誘導加速器のコイルの両端に矩形パルス電圧$V(t)$、

$$V(t)=\begin{cases}0 & (t<0,\ t>\Delta t)\\ V & (0\le t\le \Delta t)\end{cases}$$

を与えた場合を考える。(2)の磁束$\Phi(t)$と電圧$V(t)$の関係を用いて、磁性体の飽和磁束密度をB_Sとして連続加速可能な時間の上限Δtを求めよ。ただし、ヒステリシス特性は考えず、磁性体中での$H-B$の特性は、図２のように$H=0$の時$B=0$で飽和まで透磁率は一定であるとする。

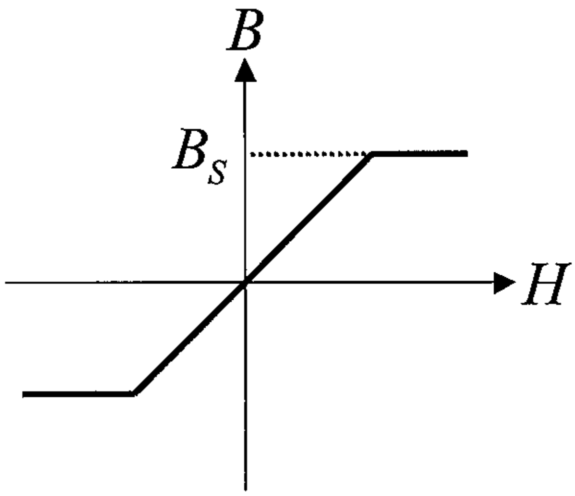

図２：磁性体の$H-B$特性

(4) 電子ビームの電流モニター（図１右）は、矩形パルス状に通過する電子ビームの電流$I_b(t)$、

$$I_b(t)=\begin{cases}0 & (t<0,\ t>\Delta t)\\ I_{beam} & (0\le t\le \Delta t)\end{cases}$$

が作る磁場による誘導電流を計測することで電子ビームの電流を測定する。この電流モニターの磁性体に巻いたコイルの巻数はNとし、誘導加速器と同様にビーム軸からコア中心までの距離をrとし、コアの断面積をSとする。この電流モニターの出力端子に抵抗Rをつなぎ、その両端の電圧を観測する。電子ビームによる変動磁場により誘起される電圧を電圧源として等価回路を書き、抵抗両端の電圧波形の時定数を求めよ。ただし、出力につなぐ回路の容量性の負荷は無視できる程小さいとする。

第 7 問　総合問題 3

黒鉛（グラファイト）とダイヤモンドはどちらも炭素（原子量 12）のみで構成されているが、その結晶構造の違いから、硬さ、電気伝導度、熱伝導度、電子構造など、黒鉛とダイヤモンドの物性は著しく異なっている。

問 1

(1) 黒鉛とダイヤモンドの結晶構造の違いについて述べよ。また、X 線、中性子などのプローブを用いて、黒鉛とダイヤモンドの結晶構造の違いを調べる方法および原理について述べよ。

(2) 可視光のもとでは黒鉛の表面は金属光沢を持ち電気伝導を示すが、ダイヤモンドは透明で絶縁体である。光学的および電気的性質の違いについて、結晶構造と化学結合の観点から説明せよ。

(3) 黒鉛の電気伝導度は結晶方位により大きく異なっている。その理由について考察せよ。

問 2

(1) 室温大気圧下で黒鉛からダイヤモンドへ転移するときの相転移エンタルピー変化を求めよ。ただし、室温大気圧下での黒鉛とダイヤモンドの燃焼エンタルピーはそれぞれ −393.51 kJ/mol, −395.41 kJ/mol とする。

(2) 室温大気圧下で黒鉛とダイヤモンドのどちらが熱力学的に安定であるかを論ぜよ。ただし、室温大気圧下での黒鉛とダイヤモンドのエントロピーはそれぞれ、5.74 J/K/mol, 2.38 J/ K/mol とする。

(3) 室温大気圧下で黒鉛とダイヤモンドがともに安定に存在するのはなぜか。

(4) 室温で黒鉛とダイヤモンドが平衡になる圧力を求めよ。ただし、黒鉛、ダイヤモンドの密度をそれぞれ 2.16 g/cm^3, 3.52 g/cm^3 とし、状態変化は準静的であるとする。また、黒鉛とダイヤモンドの高圧下での熱力学的安定性について論ぜよ。