総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

５年一貫制博士課程入学試験問題

数　学

平成２１年９月１日（火）９時３０分～１１時００分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙１枚が配布されていることを確認すること。

☆ 試験問題（３問）ごとに、異なった答案用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第○○問□□枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号及び答案用紙の順番を記入すること。

解答できない場合も、受験番号、氏名、問題番号を記入し、提出すること。

☆ 解答用紙・計算用紙がさらに必要な場合は、挙手をして監督者に知らせること。

数学

第1問

整数 n に依存する複素数 z の関数 $f(z,n)$ を以下で定義する。

$$f(z,n) = \frac{1}{z^2 - n^2}$$

(1) $f(z,n)$ の極と留数を全て求めよ。

(2) 以下に定義する複素関数 $g(z)$ の極と留数を全て求めよ。

$$g(z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{z \sin(\pi z)}$$

(3) $g(z)$ を $f(z,n)$ を用いて表せ。またその等式が成り立つ理由を説明せよ。

第2問

以下の2階常微分方程式を考える。ただし $\delta(t)$ はデルタ関数。

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\omega^2 + \lambda\delta(t))y = 0$$

(1) この方程式の一般解を $t > 0$、$t < 0$ 各々の領域で求め、
$t = 0$ における接続条件を求めよ。

(2) この方程式の二つの独立な解 $f(t)$、$g(t)$ を求めよ。
ただし各々の境界条件は、$t \to \infty$ の極限で、 $f(t) = \exp(-i\,\omega\, t)$、
$t \to -\infty$ の極限で、 $g(t) = \exp(i\,\omega\, t)$。

(3) ロンスキアン $W(f, g) = g(t)\frac{d}{dt}f(t) - f(t)\frac{d}{dt}g(t)$ が
t によらない定数であることを示せ。

(4) 以下の性質を満たすグリーン関数 $G(t, s)$ を求めよ。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 + \lambda\delta(t)\right) G(t, s) = \delta(t - s)$$

$|t - s| \to \infty$ の極限で、$G(t, s) \propto \exp(-i\,\omega\, |t - s|)$

第３問

二つの実数 m_3, m_1 に依存する２次元行列 $H = m_3\sigma_3 + m_1\sigma_1$ を考える。

パウリ行列: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
ここで $i^2 = -1$ 。

(1) $U(\phi) = \exp(i\frac{\phi}{2}\sigma_2)$ と定義する。
$U(\phi) = \cos(\frac{\phi}{2}) + i\sigma_2 \sin(\frac{\phi}{2})$ を示せ。
$U(\phi)$ はユニタリーで $\det U(\phi) = 1$ であることを示せ。

(2) $H \to U(\phi)HU^{-1}(\phi)$ によって H を対角化できる。
その固有値と ϕ を求め、m_3, m_1 を用いて表せ。

(3) 以下の微分方程式に従う２次元ベクトル $\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$ を求めよ。

$$i\frac{d}{dt}\psi = H\psi = (m_3\sigma_3 + m_1\sigma_1)\psi$$

ただし初期条件は　$\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) 以下で定義された前問の解 $\psi(t)$ による σ_3 の期待値を計算し、
$m_3 = m_1$ の場合を t の関数として図示せよ。

$$\psi(t)^\dagger\sigma_3\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1^*(t), & \psi_2^*(t) \end{pmatrix} \sigma_3 \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$$

ここで * は複素共役をとる演算を意味する。