

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

平成 18 年度 5 年一貫制博士課程入試問題

英語・数学

平成 17 年 9 月 1 日（木）10 時 00 分～12 時 00 分

注意

- ☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。
- ☆ 各自に計算用紙 1 枚が配布されていることを確認すること。
- ☆ 英語（2 問）と数学（2 問）の試験問題ごとに、異なった解答用紙を使用すること。
- ☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号、及び解答用紙の順番を記入すること。

## 英語

### 第1問

放射光とX線管とを比較した以下の英文を和訳せよ。意識でよいが、内容が良く伝わるように訳せ。

X-ray tubes have been used in the laboratory as well as in hospitals and continue to be used for various purposes. In comparison, the newer synchrotron radiation has great advantages over X-ray tubes when it comes to investigating the microscopic structure of materials.

An important advantage is that, X-rays from the synchrotron radiation source have the right energies to interact with many electrons in lighter atoms, which make up most common materials. X-ray tubes produce photons with higher energy which make them useful for investigating objects made of very heavy elements such as gold (Au). However, these high energy photons would pass right through materials made up of light atoms without interacting.

The greatest advantage of the synchrotron radiation source is its brightness. The photons from the synchrotron radiation source are concentrated on a small area, whereas those from the X-ray tube are widely scattered. A higher concentration of photons on a smaller area makes it possible to increase the selectivity of the experiments. It becomes possible to study smaller objects, or narrowly select more specific photon energies (down to tenths of an electron volt) to study specific phenomena such as photoexcitation resonances with high resolution.

Adapted from the text found in the home-page of the Advanced Light Source, Berkeley.  
THE ADVANCED LIGHT SOURCE: A Tool for Solving the Mysteries of Materials.  
<http://www.lbl.gov/MicroWorlds/ALSTool/>

## 第2問

原子の構造の研究の初期に関する以下の記述を英訳せよ。  
意識でかまわないが、内容がはっきり伝わるように留意せよ。

負電荷を持つ電子が発見されてから、すべての元素の原子は電子をもつと考えられた。そして J.J. Thomson は、正電荷と電子とが共に原子全体に分布しているという原子構造を提唱した。

Rutherford は、正電荷をもつ高速の  $\alpha$  粒子が金の薄膜を通り抜けるときの曲げられ方を調べた。その結果、大部分の  $\alpha$  粒子は素通りするが、90 度以上曲げられるものがあることがわかった。 $\alpha$  粒子が質量のはるかに小さい電子によって大きく曲げられることは考えにくい。また、J.J. Thomson の考えにしたがうと、正電荷と電子がつくる電場は打ち消しあうので、やはり  $\alpha$  粒子が大きく曲げられることは考えにくい。よって、Rutherford は、正電荷と原子の質量のほとんどが原子内のせまい部分に集中しているとの結論に達した。

数学

第1問

1. 以下の行列  $U$  がユニタリ行列になるために実変数  $w, x, y, z$  が満たすべき条件を求めよ。

$$U = w\sigma^0 + ix\sigma^1 + iy\sigma^2 + iz\sigma^3$$

$i^2 = -1$  であり、 $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$  は以下の行列である。

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. 関数  $x(t)$  に関する以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3x = \cos(t)$$

3. 以下の積分公式を導け。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

(ヒント:  $I^2 = \pi$  を示せ。)

第2問

3次元空間座標  $\vec{x} = (x, y, z)$  と時間  $t$  の関数  $G(\vec{x}, t)$

は、以下の拡散方程式に従う。

$$\frac{\partial}{\partial t} G(\vec{x}, t) = \Delta G(\vec{x}, t)$$

(  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  はラプラシアン)

1.  $n(t) = \int d^3x G(\vec{x}, t)$  とするとき、 $n(t)$  が保存される

こと、すなわち  $\frac{dn}{dt} = 0$  であることを示せ。

2. 拡散方程式の解を、実空間  $\vec{x}$  から波数空間  $\vec{p} = (p, q, r)$

へのフーリエ変換を利用して求めよう。

$$G(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} G(\vec{p}, t)$$

とするとき、 $G(\vec{p}, t)$  の従う方程式を導け。

(  $\vec{p}\cdot\vec{x} = px + qy + rz$  は  $\vec{p}$  と  $\vec{x}$  の内積)

3. 時刻  $t = 0$  において原点  $\vec{x} = (0, 0, 0)$  に局在した以下の初期値が与えられたとき、 $G(\vec{p}, t)$  を求めよ。

$$G(\vec{x}, 0) = \delta^3(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

4. フーリエ変換を遂行して、 $G(\vec{x}, t)$  を求めよ。

(ヒント： 第1問 3. の積分公式を参照してよい。)

5.  $G(\vec{x}, t)$  は粒子の分布関数と解釈できるが、時刻  $t = 0$  で原点に局在した粒子が拡散する過程において、時刻  $t$  における原点からの平均到達距離を求めよ。

総合研究大学院大学高エネルギー加速器科学研究科

平成 18 年度 5 年一貫制博士課程入試問題

物理学

平成 17 年 9 月 1 日 (木) 13 時 00 分～16 時 00 分

注意

☆ 答案用紙の所定の欄に、受験番号、氏名を記入すること。

☆ 各自に計算用紙 1 枚が配布されていることを確認すること。

☆ 7 問の中から、4 問を選んで解答せよ。

ただし、素粒子原子核理論を第 1 志望とする受験生は、

第 1 問 (量子力学) を必ず選択しなければならない。

☆ 選択した 4 問ごとに、異なった解答用紙を使用すること。

☆ 各問題に対して、答案用紙は複数使用してよいが、第〇〇問□□

枚目というように、所定の欄に、選択した問題の番号、及び解答

用紙の順番を記入すること。

## 第1問 量子力学

調和振動子（質量  $m$ ，振動数  $\omega$ ）を量子力学的に考えよう。系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$$

で与えられる。ここで  $\hat{x}$  と  $\hat{p}$  は、 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  という交換関係を満たすエルミート演算子であり、それぞれ座標と運動量に対応する。量子力学的な状態は、これらの演算子が作用する線型空間の元  $|\psi\rangle$  で与えられ、その時間発展はシュレディンガー方程式

$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$  により記述される。以下では長さ、質量、時間の単位をうまくとることにより、 $\hbar = m = \omega = 1$  とする。

このような問題を扱うに当たり、演算子  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p})$  を導入するのが便利である。これ

と共役な演算子  $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p})$  との間には  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  という交換関係が成り立つ。これ

らの演算子を用いると、ハミルトニアンは  $\hat{H} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}$  と書き換えられる。以下の設問に答えよ。

- (1) ハミルトニアン  $\hat{H}$  と演算子  $\hat{a}$  の交換関係を求めよ。同様に  $\hat{H}$  と  $\hat{a}^\dagger$  の交換関係を求めよ。
- (2) この系の基底状態が  $\hat{a}|0\rangle = 0$  を満たす  $|0\rangle$  で与えられると仮定したとき、すべての励起状態と対応するエネルギー固有値を求めよ。但し状態を規格化する必要はない。
- (3) 演算子  $\hat{a}$  の固有状態  $|\alpha\rangle$  を考える。即ち、 $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  とする。ここで演算子  $\hat{a}$  はエルミートではないので、固有値  $\alpha$  は一般に複素数である。（既に導入した  $|0\rangle$  という状態は、 $|\alpha\rangle$  において  $\alpha = 0$  とした特別な場合と見なせる。）

このような状態  $|\alpha\rangle$  が規格化を除いて

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger) |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\alpha \hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

のように与えられることを示せ。

- (4)  $|\alpha\rangle$  という状態における  $\hat{x}$  と  $\hat{p}$  の期待値  $\langle x \rangle, \langle p \rangle$  をそれぞれ求めよ。
- (5)  $|\alpha\rangle$  という状態における  $\hat{x}$  と  $\hat{p}$  の不確定性  $\Delta x, \Delta p$  をそれぞれ求め、それらがハイゼンベルグの不確定性関係  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$  において等号を与えていることを示せ。
- (6) 時刻  $t=0$  において  $|\alpha\rangle$  という状態が与えられたとき、時刻  $t>0$  で得られる状態もまた、演算子  $\hat{a}$  の固有状態であることを示せ。又、その固有値を時刻  $t$  の関数として求めよ。
- (7)  $|\alpha| \gg 1$  の場合を考えると、不確定性  $\Delta x, \Delta p$  は期待値  $\langle x \rangle, \langle p \rangle$  の大きさの程度と比べて無視できるので、量子力学的な状態の時間発展は、古典力学的な運動（単振動）で近似的に記述できるはずである。設問（4）、（5）、（6）の結果を用いてこの事を論じよ。

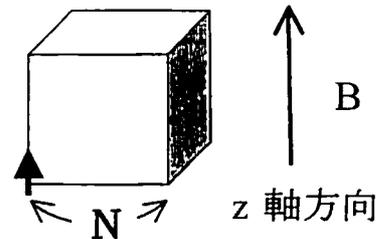
## 第2問 熱力学

一辺の長さが、x軸方向、y軸方向、z軸方向、等しく  $N (>> 1)$  である単純立方格子（格子定数は1）があり、その各格子点には大きさ  $1/2$  のスピンの存在する。この多スピン系では、最隣接スピン間に、強磁性的交換相互作用  $J$  が作用しており、更に、外部磁場  $B$  がz軸方向にかかっている。従って、そのハミルトニアン  $H$  は、以下で与えられる。

$$H = -J \sum_{(l,l')} S_{z,l} S_{z,l'} - B \sum_l S_{z,l}, \quad J > 0, B > 0,$$

ここで、 $S_{z,l}$  は各格子点  $l \equiv (l_x, l_y, l_z)$ ,  $(l_x, l_y, l_z = 1, 2, 3, \dots, N)$  にある  $2 \times 2$  のパウリ・スピン行列のz成分、

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



であり、 $(l, l')$  はこの単純立方格子内で最隣接する格子点对を表わす。

又、この単純立方格子の表面にあるスピンと、それに対応する反対側の表面にあるスピンの間には、内部と同様の強磁性的交換相互作用  $J$  が作用しており、 $N+1$  は  $1$  と見做す事のできる周期的境界条件が成立しているとする。

1)  $J=0$  の際、絶対温度  $T$  における熱力学的分配関数  $Z$ 、自由エネルギー  $\Omega$ 、及び、磁化  $M$  を求めよ。尚、磁化  $M$  とは、 $S_{z,l}$  の期待値である。

$$M_l \equiv \langle S_{z,l} \rangle, M \equiv N^{-3} \sum_l M_l, \langle \dots \rangle \equiv Z^{-1} \text{Tr}(\dots e^{-H/k_B T}), Z \equiv \text{Tr}(e^{-H/k_B T})$$

2)  $M$  と  $T$  との関係を簡単な模式図で示せ。

3)  $B$  が無限小の場合を想定し、平均場近似を用いて、磁化  $M$  を決定する方程式を導け。

尚、平均場近似とは、あるサイト  $l$  の磁化  $M_l$  を計算する際は、それ以外の、周囲のサイト  $l' (\neq l)$  の磁化  $M_{l'}$  は、未定で、且つ、サイト  $l'$  に依存しない定数  $M$  である、

$$S_{z,l} S_{z,l'} \rightarrow S_{z,l} \langle S_{z,l'} \rangle \rightarrow S_{z,l} M$$

と仮定し、この仮定のもとに実際に計算した結果は、仮定と同じになるという条件を課する事である。

4) この方程式の解法や、結果として得られる温度と磁化との関係の凡そを、図示せよ。

### 第3問 電磁気学

必要であれば、MKSA 単位系での真空中のマックスウェル方程式

$$(1) \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2) \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4) c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

を用いて以下の設問に答えよ。いずれも真空中の問題とし、重力も無視するものとする。

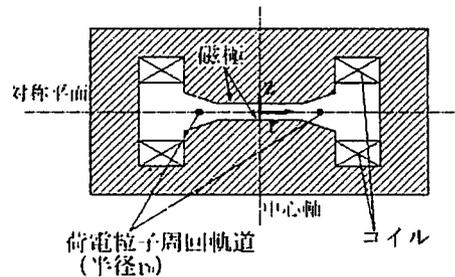
【1】電荷が半径  $a$  の球内に一様な正電荷密度  $+\rho$  で分布している。

(1) 球の内外の、球の中心からの距離  $r$  における電界と電位を求めよ。ただし、球の中心から無限遠の点における電位を 0 とする。

(2) 球内の任意の点に電子（電荷  $-e$ 、静止質量  $m_0$ ）を初速度 0 で置いた時、どのような運動となるか、説明せよ。

ただし、電子は電荷球内を自由に運動することができ、かつそれにより球内の電荷の分布は乱されないものとする。また、非相対論的領域の範囲で考察せよ。

【2】下図に示すような電磁石において、内部の磁場が中心軸の周りに対称で、磁場と直交する対称平面が存在するものとする。今、対称平面内において中心軸の周りを半径  $r_0$  で周回する荷電粒子（電荷  $e$ 、静止質量  $m_0$ ）を考える。



(1) 対称平面上の磁束密度  $B(r)$  のもとで荷電粒子が速度  $v$  で一定の半径の軌道を維持するとき、この半径  $r_0$  を求めよ。

(2) ここで、磁束密度  $B(r)$  を時間的に変化させると、周上接線方向にのみ誘導電場を生じる。この時半径  $r_0$  における誘導電場の強さを求めよ。

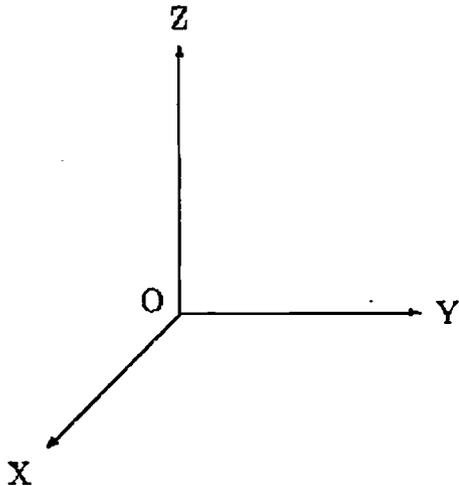
(3) (1) と (2) の結果を用いて、一定軌道半径  $r_0$  で粒子加速を実現する条件を導け。

(4) (3) で求めた条件の相対論的領域における有効性を考察せよ。

(5) この加速方式で電子を加速していったときの到達エネルギーの限界は何かで決まるか考察せよ。

第4問 古典力学

3次元空間座標の原点O、X軸、Y軸、Z軸を図のように右手系にとり、



位置ベクトル  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  に対して3次元極座標  $r, \theta, \phi$  を次のように定義する。

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$\tan \theta = \sqrt{(x^2 + y^2)} / z$$

$$\tan \phi = y / x$$

以下の問いに答えよ。

(1)  $x, y, z$  と  $r, \theta, \phi$  の関係を図に示し、

$x, y, z$  を  $r, \theta, \phi$  を用いて表せ。

(2) 3次元空間を非相対論的に運動する粒子（質量mの質点）の運動エネルギーが次のようになることを示せ。

$$\frac{m}{2} \{ \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \}$$

(“ドット”はその変数の時間微分を意味する。)

(3) この粒子が、原点の向きに大きさ

$$k / r^{(n+2)}$$

の引力 ( $k$  は正の値を持つ定数、 $n$  は0または正の整数) を受けるとする。この力のポテンシャルを求めよ。ただし、 $r \rightarrow \infty$  でポテンシャルは0であるとせよ。

(4) (3) の力を受けて運動する粒子が、初期の時刻に、原点の回りに有限の角運動量 (大きさ  $\ell$  ) を持つとする。

(i) 粒子の全エネルギーを求め、それが極座標  $r, \theta, \phi$  のうち

$r$  とその時間微分関数であることを示せ。

(ii) (i) より、この系は “有効ポテンシャル (effective potential)”

$$V^{(n)}(r)$$

の中での粒子の1次元運動とみなすことができる。有効ポテンシャルの式を求め、 $n=0$  と  $n=2$  の場合の形を図で示せ。

(iii) 粒子が原点の回りに円運動を行うのはどのような場合かを述べ、

そのときの軌道半径と  $\ell$  との関係を求めよ。

(iv) 粒子が原点に落下することなく安定に円運動を行うために、 $n$  が満たすべき条件を求めよ。

第5問 物理化学

1. 以下の a, b, c を、エネルギー準位間隔の小さいものから大きいものへと並べよ。

- a) 分子の電子状態
- b) 分子の回転状態
- c) 分子の振動状態

また、以下の実験方法はそれぞれ上記 a, b, c のどれと最も関連が深いか。

赤外線分光実験

マイクロ波分光実験

放射光による分光実験

2. 水素原子がある時点  $t = 0$  において以下のように固有状態  $\Psi_{nlm}$  を重ね合わせた状態になっているとする。

( $n$ : 主量子数、 $l$ : 方位量子数、 $m$ : 磁気量子数)

$$\Psi = \left( \frac{1}{\sqrt{14}} \right) (2\Psi_{100} - 3\Psi_{200} + \Psi_{322})$$

(a) 上記  $t = 0$  における  $\Psi$  の状態は、 $L^2$ 、 $L_z$  および parity operator の固有状態にそれぞれなっているか。

(b) 今この原子が  $(nlm) = (100)$ 、 $(200)$ 、 $(322)$  の状態に見出される確率は、それぞれいくらか。また、それ以外の状態に見出される確率はいくらか。

(c) エネルギー、 $L^2$ 、 $L_z$  の期待値をそれぞれもとめよ。エネルギーのリュドベリ単位は  $R$  とし、陽子は無限に重いと仮定してよい。

3. 水素分子イオン  $\text{H}_2^+$  を考える。

- a) 電子が分子軸に沿って感じるポテンシャルをスケッチせよ。
- b) もっとも低い二つの電子状態の波動関数を分子軸に沿ってスケッチせよ。  
水素原子波動関数とはどのような関係にあるか。

## 第6問 実験技術 I

絶対温度  $T$  にて準熱平衡にある気体分子の圧力は

$$p = nkT \quad (1)$$

で与えられる。 $n$  は単位体積当たりの気体分子の数、 $k = 1.38 \times 10^{-23}$  (J/K) はボルツマン定数である。また、速度  $v$  の分布は等方的であり、 $v = |v|$  の分布はマクスウェル・ボルツマンの分布関数

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{m}{2kT} v^2\right) \quad (2)$$

で記述される。 $m$  は気体分子の質量である。気体を閉じ込めている容器の壁に単位時間当たり衝突する分子数は、単位面積当たり

$$\Gamma = \frac{1}{4} n \bar{v} \quad (3)$$

で与えられる。 $\bar{v}$  は分布関数 (2) で与えられる分子の平均速度である。

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv \quad (4)$$

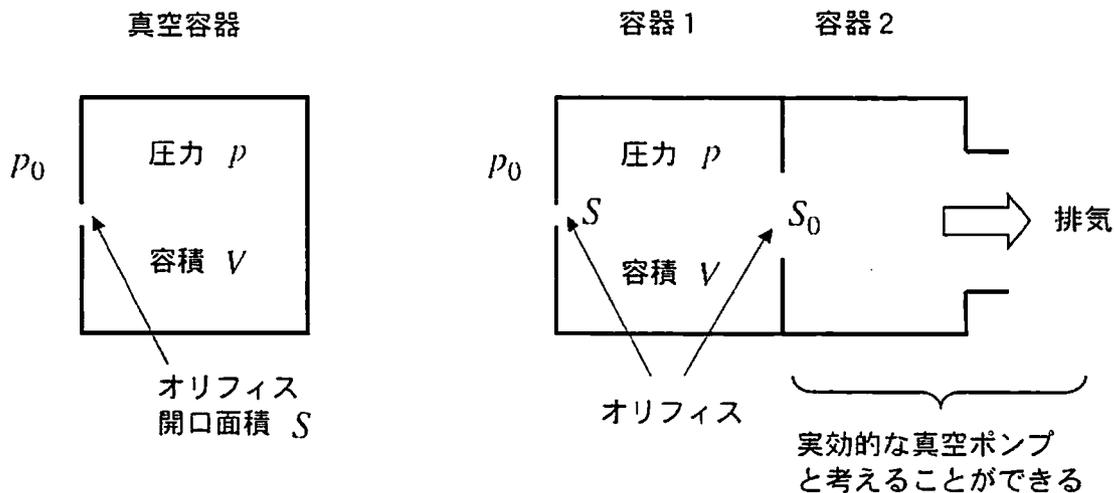


図 1

図 2

- 1)  $\bar{v}$  を  $k$ 、 $T$ 、 $m$  で表わし、気体の分子量を  $M = 28$  として、 $T = 300\text{K}$  のときの  $\bar{v}$  [m/sec] を求めよ。アボガドロ数は  $N_0 = 6.02 \times 10^{23}$  /mol である。

ヒント：
$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}, \quad \pi = 3.14, \quad \sqrt{5.67} = 2.38, \quad \sqrt{5.66} = 2.37$$

- 2) 単位時間当たり容器の壁に単位面積当たり衝突する分子数  $\Gamma$  を気体の圧力  $p$  で表せ。

- 3) 図1のように気体は体積 $V$ の容器に入っていて、容器の壁に面積 $S$ の孔（オリフィス）が開いているものとする。単位時間当たり $\Gamma S$ 個の分子がオリフィスの開口部に飛び込み、外部へ流出することになる。以降、壁の厚さは無視できるほど薄いものとし、壁面からのガス放出は無視できるものとする。同様にして、容器の外部の分子は単位時間当たり $\Gamma_0 S$ 個の割合でオリフィスを通して容器内に流入する。ここで $\Gamma_0 = n_0 \bar{v} / 4$ であり、 $n_0$ は圧力 $p_0$ における分子数密度である。したがって外部の圧力を $p_0$ とすると、容器内の気体の圧力 $p$ の変化は

$$V \frac{dp}{dt} = -C(p - p_0) \quad (5)$$

と書ける。 $C$ を $S$ 、 $\bar{v}$ で表わし、 $T = 300K$ 、 $S = 1\text{cm}^2$ のときの $C$  [ $\ell/\text{sec}$ ]を求めよ。 $C$ をオリフィスのコンダクタンスといい、通常 [ $\ell/\text{sec}$ ]なる単位で表わす。

ヒント： 単位時間当たりの容器内の気体分子数の変化は $Vdn/dt$ である。

(1) 式、(3) 式を用いよ

- 4) 図2のように、図1の容器はさらに面積 $S_0$ のオリフィスを通して真空ポンプで排気されているものとする。面積 $S_0$ のオリフィスを通して気体は全て真空ポンプで排気され、 $S_0$ から容器内に戻る分子はないものとする。時刻 $t = 0$ に容器内の圧力は $p = p_0$ であったものとし、 $t = 0$ から排気を始めたときの、容器内の圧力を時間の関数で書け。

ヒント： (5) 式右辺に $S_0$ による分子数の変化率を加える。

定係数一階微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + f(t)$$

の解は次式で与えられる。

$$x(t) = e^{at} \left\{ \int_0^t e^{-at} f(t) dt + x(0) \right\}$$

- 5) 前問4)において、十分時間を経た後 ( $t \rightarrow \infty$ ) の容器内の圧力 $p$ を、 $p_0$ の1/100以下にするためには、 $S_0$ は $S$ の何倍以上にしなければならないか。このときの面積 $S_0$ のオリフィスのコンダクタンス $C_0$ を実効的な真空ポンプの排気速度と定義する。 $C_0$ は何  $\ell/\text{sec}$  以上か。

## 第7問 実験技術Ⅱ

同軸ケーブルで代表される伝送線の中を伝搬する信号を考える。損失のない伝送線を考えるものとし、図のように伝送線の方に  $x$  軸をとり、電圧  $V(x,t)$ 、電流  $I(x,t)$  を定義する。微小区間  $\Delta x$  の伝送線のインダクタンスを  $L\Delta x$ 、線間容量を  $C\Delta x$  とする ( $L$ 、 $C$  はそれぞれ単位長さ当たりのインダクタンス及び容量)。このとき、 $\Delta t$  を微小時間間隔として

$$\begin{aligned} V(x+\Delta x,t) &= V(x,t) - L \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} \Delta x \\ V(x,t+\Delta t) &= V(x,t) + \frac{1}{C\Delta x} \{I(x-\Delta x,t) - I(x,t)\} \Delta t \end{aligned} \quad (1)$$

が成立する。

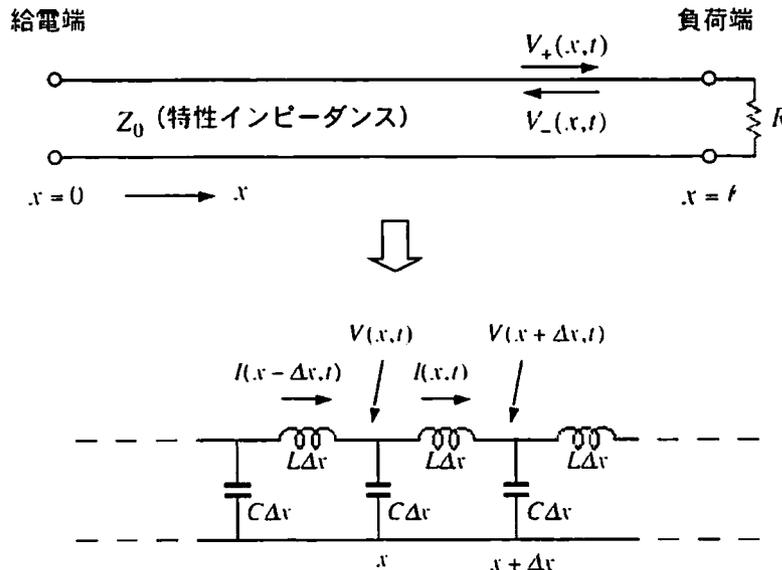


図 伝送線の等価回路

1)  $\Delta x \rightarrow 0$ 、 $\Delta t \rightarrow 0$  の極限では (1) 式は次の微分方程式になる。

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = \square, \quad \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = \square \quad (2)$$

(2) 式を完成させよ。

2) (2) 式より  $V(x,t)$ 、 $I(x,t)$  について、次の1次元波動方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = \square, \quad \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2} = \square \quad (3)$$

(3) 式を完成させよ。これが伝送線中の信号伝搬を記述する基本方程式である。

3) (3) 式における電圧についての方程式の解は

$$V(x,t) = V_+(x - \frac{t}{\sqrt{LC}}) + V_-(x + \frac{t}{\sqrt{LC}}) \quad (4)$$

で与えられることを示せ。ここで  $V_{\pm}(z)$  は  $z$  の任意関数である。 $V_{\pm}(x \mp t/\sqrt{LC})$  はそれぞれ  $x$  の正負方向に、速度  $v = 1/\sqrt{LC}$  で伝搬する電圧を表しており、伝送線中では、任意の波形の信号がその波形を保ったまま正負両方向に伝搬することを表わす。信号源側から負荷側へ向かって進行する信号を進行波、負荷側から信号源側へ向かって進行する信号を反射波と云う。

ヒント：  $z_{\pm} = x \pm t/\sqrt{LC}$  なる変数変換を施すと

$$\frac{\partial f(x \pm t/\sqrt{LC})}{\partial x} = \frac{df(z_{\pm})}{dz_{\pm}}, \quad \frac{\partial f(x \pm t/\sqrt{LC})}{\partial t} = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{df(z_{\pm})}{dz_{\pm}}$$

4) 上と同様に (3) 式の電流についての方程式から

$$I(x,t) = I_+(x - \frac{t}{\sqrt{LC}}) + I_-(x + \frac{t}{\sqrt{LC}}) \quad (5)$$

を得るが、(2) 式を満たすためには

$$I_{\pm}(x \mp \frac{t}{\sqrt{LC}}) = \pm \frac{1}{Z_0} V_{\pm}(x \mp \frac{t}{\sqrt{LC}}) \quad (\text{複合同順}) \quad (6)$$

$$Z_0 = \sqrt{L/C} \quad (7)$$

でなければならないことを示せ。ここで  $Z_0$  を伝送線の特性インピーダンスと云う。

5) 図のように給電端  $x=0$  に信号源を、負荷端  $x=l$  に負荷抵抗  $R$  を接続する。このとき負荷端における反射波電圧  $V_-(l+t/\sqrt{LC})$  は、進行波電圧  $V_+(l-t/\sqrt{LC})$  と

$$V_-(l + \frac{t}{\sqrt{LC}}) = r V_+(l - \frac{t}{\sqrt{LC}}) \quad (6)$$

なる関係にある。 $r$  は負荷端における信号の反射率を表し、振幅反射係数と呼ばれる。 $r$  を  $Z_0$ 、 $R$  で表わせ。

[解説]  $R = Z_0$  では負荷端において反射波電圧は  $V_-(l+t/\sqrt{LC}) = 0$  となり、進行波電圧  $V_+(l-t/\sqrt{LC})$  のみとなる。すなわち給電端に加えられた電圧波形が、進行波として伝送線を伝搬してそのまま負荷端に現れる。これをインピーダンスマッチングと云う。