

2022年9月27日

報道関係者各位

大学共同利用機関法人 高エネルギー加速器研究機構

コンデンサーの極板間の電場と電磁波の電場は別物 ー100年続いた混乱を解消し、電磁波発生の安易な説明を正すー

本研究成果のポイント

- コンデンサーに交流をかけたときに極板間にできる磁場を極板間の変動する電場がつくっているという記述には誤解がある。この指摘は100年前からあったが、あまり注目されなかった。
- 「相関関係」に過ぎないのに「因果関係」と間違えることは統計の解釈でもよく起きるが、似たことが物理現象を表す法則の解釈でも起きている。
- これまでの論点を整理した論文筆者は、電場には2種類あることに注意することで、コンデンサーの極板の電荷が作る電場と電磁波の中の電場とは異なることを理解できるとしている。

【概要】

大学共同利用機関法人高エネルギー加速器研究機構(KEK)物質構造科学研究所 低速度電子実験施設の兵頭俊夫協力研究員(東京大学名誉教授)は、平行平板コンデンサーの極板の電荷による電場の変動(変位電流)は磁場を作らないという正しい認識が定着していない要因を指摘し、その詳細を解明することで正しい認識を定着させるための論文を発表しました。

コンデンサーの極板の電荷による電場が変動しても磁場を作らないことは100年前に証明されているのですが、なかなか常識にならず、現在でも「平行平板コンデンサーの極板の間で変化する電場が極板間やまわりに作る磁場」が、電磁波が発生するしくみの説明の前置きとされているのを見かけることがあります。この状況が100年も続いてしまった要因を以下の[1]～[3]のように解明し、正しい理解に至るための要点を示しました。

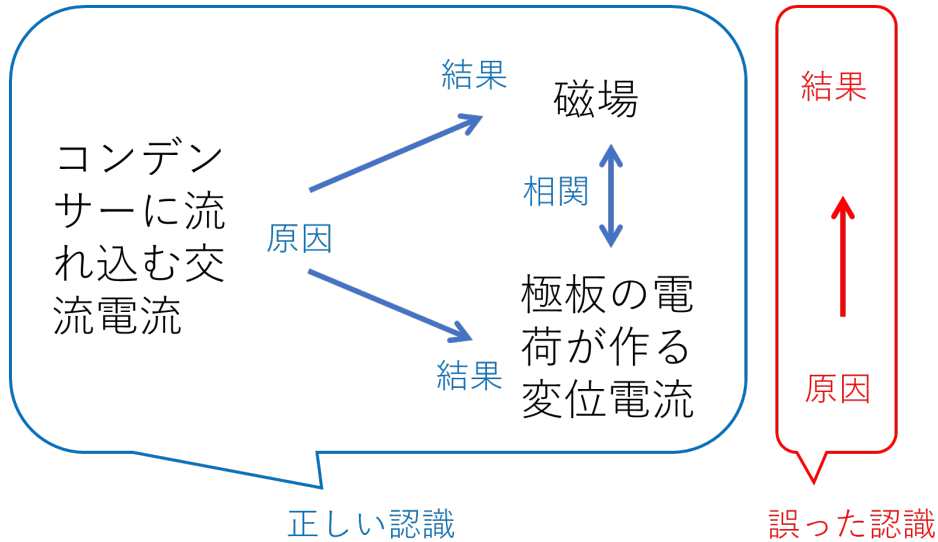
[1] 電場にクーロン電場と誘導電場があることは知っていても、マクスウェル方程式の電場がそれらの和であり、見えないところで別々に電荷の保存と電磁波の存在を独立に担っていることへの認識が不十分であること、

[2] 磁場の計算に使われるアンペールマクスウェルの法則が因果関係の式と誤認されていること、

[3] アンペール・マクスウェルの法則を用いた磁場の計算が与える第一印象から、誤った因果関係をよみとってしまうこと

これらに加えて、実際に流れている通常の電流だけで極板間の磁場を説明する具体的な計算が比較的最近まで行われなかったことも、長い間正しい認識が広まらなかった要因だろうと指摘しました。

本研究は、9月23日、European Journal of Physicsにonline掲載されました。



【研究の背景】

図1は平行平板コンデンサーを含む回路に電流 I が流れてコンデンサーが充電されているときの電場 E と磁場 B の様子を模式的に示しています。充電中なので極板の電荷（この図の場合は下が正で上が負）が次第に増加し、それが作る電場も次第に大きくなります。電流 I が交流の場合はその大きさと向きが周期的に変わり、電場も変動して大きさや向きが変わります。このような変化する電場のことを、その時間微分 $\epsilon_0 \partial E / \partial t \neq 0$ で表して変位電流密度（※1）といいます。

電流のまわりに磁場ができることはよく知られています。図1のようなコンデンサーを含む回路でも磁場ができます。一定の電流で充電しているときは静磁場で、交流が流れているときは変動する磁場です。ただし、導線のまわりと極板の間では磁場の様子が違います。前者では導線に近づくほど磁場が強くなりますが、後者では中心に近づくほど弱くなります。

本論文が扱っているのは、極板間や付近の磁場が、極板の電荷が作る電場の変化（クーロン電場の変位電流密度）で生じていると言ってよいか、さらにはそれが電磁波の発生と関係があると言ってよいかという問題です。

答えが否であることは、100年前にプランク（量子論の創設者の一人でノーベル物理学賞を1918年に受賞）が彼の電磁気学の教科書で証明しています。彼はクーロン電場は変動しても磁場を作れないことを示しました。コンデンサーの極板間の電場はクーロン電場なので、変動しても磁場を作れないことになります。

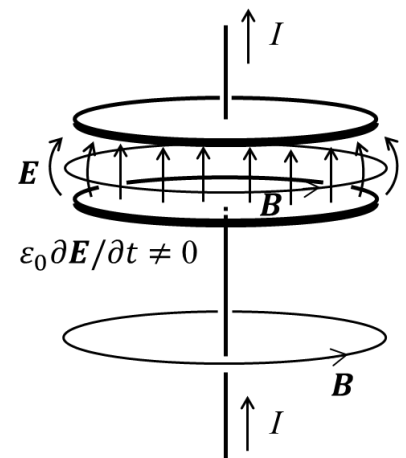


図 1

プランクのこの証明は、米国で高校の物理教育現代化を目的として作られたPSSC物理学委員会で1960年代前半に再認識され、フレンチとテスマンによって内容や背景が論文にされました。また、パーセルによって大学向けのバークレー物理コースの「電磁気」に詳しい説明が書かれました。

しかし、なぜかその後もそのことをはっきり書いた電磁気学の教科書は少数派であり続け、極板間の変動する電場がそのまわりに磁場を作るという考えは、100年後の現在も根強く残っています。

【本論文で解明したこと】

本論文では、そのような、証明済みのことが忘れられている状況が続いている要因を解明し、正しい理解の助けになる要点を示しました。その要点とは、[1] 電場には2種類あり、コンデンサーの極板間の電場は電磁波中の電場とは異なること、[2] 磁場の計算に使われるアンペール-マクスウェルの法則の積分形は、因果関係を表す法則ではないこと、[3] その法則を使って磁場の計算をするときに、面積分に使う面の選び方によって磁場の原因が決まることは、当然ながらあり得ないこと、です。

[1] 2種類の電場

マクスウェルは、ファラデーの「場」の考え方を数学的に整理して、電場と磁場の性質を式（マクスウェル方程式（※2））にまとめました。その中で一つの記号 \mathbf{E} で表現される電場は、電荷が作るクーロン電場 \mathbf{E}_C と、変化する磁場がつくる誘導電場 \mathbf{E}_I を含み、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_I \quad (1)$$

です。本論文では、マクスウェル方程式では表面に現れていないこの2つの電場について詳しく調べ、 \mathbf{E}_C と \mathbf{E}_I による変位電流密度が、それぞれ別々の役割を担っていることを示しました。充電中や普通の周波数の交流回路でコンデンサーの極板の電荷が作る変動電場は \mathbf{E}_C で、 \mathbf{E}_I は含まれません。また、電磁波中の変動している電場は \mathbf{E}_I で、そこに \mathbf{E}_C は含まれません。しかし、マクスウェル方程式はこれらを区別せずに \mathbf{E} だけで書かれているので、区別する意識が育たず、電磁波とは無関係のコンデンサーの極板の間の電場の説明が、電磁波の説明の前置きに使われてしまうのだと思われます。

[2] アンペール-マクスウェルの法則は因果関係の法則ではない

磁場は、電流を原因として生じます。そのことを直接的に表す法則が、次のビオ-サバールの法則です。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \oint_C \frac{I d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \left(\text{論文では } \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \oint_C \frac{I d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \quad (1)$$

（位置 \mathbf{r} の磁場 = 電流 I が流れている導線の位置 \mathbf{r}' の微小部分 $d\mathbf{r}'$ が位置 \mathbf{r} に作る磁場の和、すなわち積分）

この法則は、流れている電流を細かく $I d\mathbf{r}'$ に分けて、それぞれが注目する点 \mathbf{r} に作る磁場を加えあわせる（積分する）ことで磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ を計算します。よって明らかに、原因である電流から結果としての磁場を求める因果関係の法則です。これに変位電流は登場しません。

同じく磁場の計算に使われる、マクスウェルの方程式の1つであるアンペール-マクスウェルの法則は、意味が違います。マクスウェル方程式には、微分形と積分形が

あります。どちらも、式自体は因果関係を表していません。微分形は、任意の時刻・位置における、電場と磁場の時間・空間微分と電荷密度と電流密度の関係を記述しています。しかしそれらはどこでもいつでも成立しているので、それらを連立微分方程式とみなして解くと、得られる解（遅滞ポテンシャルとよばれる）は、因果関係を示す形をしています。

これに対して積分形は、微分形を微分方程式として解いた解ではありません。微分形で時間変数 t を空間全体で固定して、ベクトル解析を適用することで直ちに得られる関係式です。その1つであるアンペール・マクスウェルの法則の積分形は

$$\int_C \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \cdot d\mathbf{r}' = \int_S \left(\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}' \quad (2)$$

（曲線Cに沿っての磁場の線積分＝曲線Cを縁とする面S上の電流密度＋変位電流密度の面積分）

という形をしています。 \mathbf{j} は電流密度です。

(1) とのゆるい類似性から、(2) が、電流密度 \mathbf{j} と変位電流密度 $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ が磁場 \mathbf{B} を作ることを表しているとは解釈したくなるかも知れません。しかし、(2) は同じ時刻にたまたま空間に分布している磁場の線積分と、「電流密度と変位電流密度（電場の時間微分）の和」の面積分との間の相関関係を示しているだけなので、因果関係を読み取ってよい式ではありません。

このようなアンペール・マクスウェルの法則の積分形(2)の本質を正しく認識していないと、うっかり、コンデンサーの極板の電荷が作る電場は磁場を作れないことがすでに証明されていることを無視して、因果関係の法則と解釈し、極板間の変位電流（変動電場）が磁場を作るという説明をしてしまいかねません。実際、そのような状況が、100年間続いてきたのです。

[3] アンペール・マクスウェルの法則の積分形を用いた磁場の計算の第一印象から生じがちな誤解

アンペール・マクスウェルの法則の積分形 (2) は、[2] で述べたように結果として存在している電場と磁場の相関関係としては正しいので、それを使っても磁場を計算することができます。ただし (2) は「 $\mathbf{B} = \dots$ 」の形をしておらず、左辺の線積分と右辺の面積分が等しいという形なので、計算が可能なのは、線積分を単純な積に書き直せる対称性がよい場合だけです。

第一印象による誤解が生じがちなのは、図2のような円板型の平行平板コンデンサーを含む回路の、コンデンサーの極板のそばの点Pの磁場 \mathbf{B} の大きさの計算をするときです。直線電流を含む対称軸とPの距離を R とします。軸対称なので (2) の左辺の積分は簡単な積 $2\pi R B$ になります。右辺は、面として円板面Sを使うと、それを貫いているのは変位電流だけになります。極板の間隔が十分狭ければ、変位電流は電流 I にほぼ等しいので、

$$B \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (3)$$

です。右辺はコンデンサーのない場合の直線電流 I のまわりの磁場の表式と同じです。

この計算の第一印象から、変位電流が P の磁場を作っていると考えたくなるのが、ありがちな誤解です。誤解であることは、 P の磁場を、電流 I が貫いている面 S' を用いても計算できることから分かります。

S を使った計算をしたときにうっかりアンペールマクスウェルの法則が因果関係を表す法則と勘違いすることのないように、大学の講義などでこの計算法を教えた後で、「計算にどの面を使ったかで磁場の原因が決まるはずがない」という当たり前のことを強調することが重要です。

以上が、コンデンサーの極板の電荷が作る変位電流が磁場を作らないことがなかなか定着しない要因であろうと、この論文では指摘しています。それでは、コンデンサーの極板の間や付近の磁場は、通常の電流だけをつかって、ビオーサバールの法則(1)で説明できるのでしょうか。できるのですが、その計算に含めなければならない電流は、図3に示すような、導線を通る直線電流と、極板内を放射状に流れて極板の内側の表面に一様に分布する電荷を増減させている電流の両方です。後者の放射状電流の寄与を解析的に計算するのは容易でなく、フレンチの論文もパーセルの著書も、原理的にそのはずだとしか書いていませんでした。パートレットが近似的な計算を発表したのは1990年になってからのことで、ミルソムが数値計算で示したのもごく最近(2020年)です。このように具体的な計算が出遅れたことも、誤解の要因の1つに加えられるでしょう。

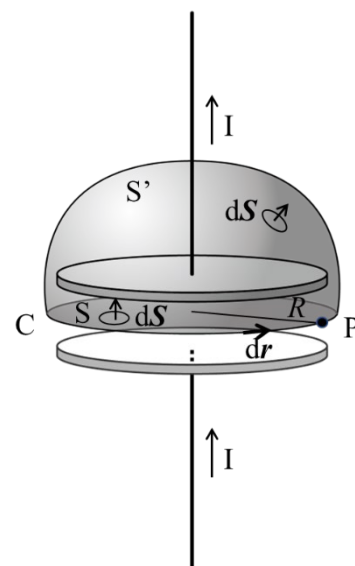


図 2

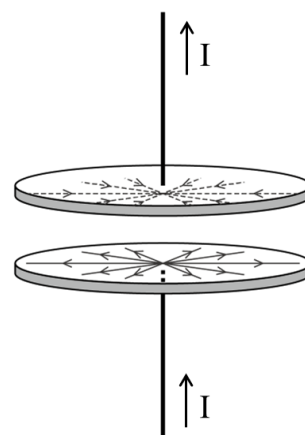


図 3

< 論文名 >

雑誌名 : *European Journal of Physics* **43**, 065202 (2022)

<https://doi.org/10.1088/1361-6404/ac8705>

論文名 : "Maxwell's Displacement Current and the Magnetic Field between Capacitor Electrodes",

(和訳 : 「マクスウェルの変位電流とコンデンサーの極板間の磁場」)

著 者 : Toshio Hyodo

【本研究の意義・社会への影響】

コンデンサーの極板間の電荷が作るクーロン電場が変動してもまわりに磁場を作ることはないという事実が、100年前に証明されているにもかかわらず定着しないことに対して、その事実を繰り返し述べるのではなく、定着しない理由を解明すること

で解決しようとしてしました。この方法が有効に働いて正しい認識が広がれば、世界中の大学の講義や教科書の内容が一部修正されるものも出てくると期待されます。また、電磁波の発生が極板間のクーロン電場の変動と結びつけて説明されていることがありますが、それも修正されることになるでしょう。

【お問い合わせ先】

<研究内容に関すること>

大学共同利用機関法人 高エネルギー加速器研究機構
物質構造科学研究所 低速陽電子実験施設 協力研究員 兵頭俊夫
Tel: 029-864-5658, 029-864-5200-4913 (PHS)
e-mail: hyodot@post.kek.jp

<報道担当>

大学共同利用機関法人 高エネルギー加速器研究機構
広報室長 勝田 敏彦
Tel: 029-879-6047
Fax: 029-879-6049
e-mail: press@kek.jp

【用語解説】

※1. 変位電流密度

電場 \mathbf{E} の時間変化率に比例する $\epsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t$ を変位電流密度といいます（比例係数 ϵ_0 は真空の誘電率）。電流という名前ですが、実際には何も流れていません。ある面積を貫く変位電流密度の和（法線成分を面積分したもの）を変位電流といいます。電場の変化と磁場の関係の議論の際は、電場の変化を変位電流密度や変位電流で表すことがよくあります。

※2. マクスウェル方程式

1865年にマクスウェルが、それまでに知られていた電気と磁気についての法則をまとめた、電磁場に関する基本方程式です。その際に彼は変位電流（※1）という新しい概念を導入しました。元の彼の式は20個の式から構成されていたのですが、それをヘヴィサイドがベクトル表記の4つの式にまとめました。